Seminario de problemas. Curso 2014-15. Hoja 19

126. *[Olimpiada Matemática Española, Fase Nacional, Ciudad Real 2004]* ¿Existe alguna potencia de 2 que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2? Justificar la respuesta.

127. *[Olimpiada Matemática Española, Fase Nacional, Santiago de Compostela 2005]* Sean a, b enteros. Demostrad que la ecuación

$$(x-a)(x-b)(x-3)+1=0.$$

admite a lo sumo una solución entera.

128. *[Olimpiada Matemática Española, Islas Canarias 2003]* Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas negras, formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.

129. *[Olimpiada Matemática Española 2010, Valladolid]* Sean $a, b, c, > 0$. Probad que para cualesquiera números positivos a, b, c se satisface la desigualdad

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c}+\frac{3a+b+c}{2a+3b+3c}+\frac{a+3b+c}{3a+2b+3c}\geq\frac{15}{8}$$

130. *[Olimpiada Matemática Internacional 1995, Toronto]* Los nuḿeros reales positivos $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ cumplen $x_0 = x_{1995}$, y

$$x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\frac{1}{x_i}$$

para $i = 1, \ldots, 1995$. Hallad el máximo valor que puede alcanzar x_0.

131. *[Olimpiada Matemática de Española, 2005, Santiago de Compostela]* En un triángulo de lados a, b, c, el lado a es la media aritmética de b, c. Denotamos A, B, C los ángulos opuestos a cada lado. Probad que

- $0 \leq A \leq \pi/3$.
- La altura relativa al lado a es tres veces el inradio r.
- La distancia del circuncentro al lado a es $R-r$, con R el circunradio.