

## Seminario de problemas. Curso 2016-17. Hoja 18

---

- 111.** Demuestra que una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea isósceles es que tenga dos medianas iguales.
- 112.** Usa el Principio del Palomar<sup>1</sup> y la ayuda para probar la siguiente afirmación: en cualquier conjunto  $S$  formado por 10 números enteros de dos dígitos, siempre podemos encontrar dos subconjuntos disjuntos cuyos elementos sumen lo mismo. (**Ayuda:** Responde a las preguntas ¿Cuántos subconjuntos podemos hacer con los elementos de  $S$ ? ¿Cuánto pueden sumar como máximo los elementos de un subconjunto de  $S$ ? ¿Quiénes son los nidos y las palomas en este problema?)
- 113.** Si  $a \geq -\frac{3}{4}$ , demostrar que la suma de números reales

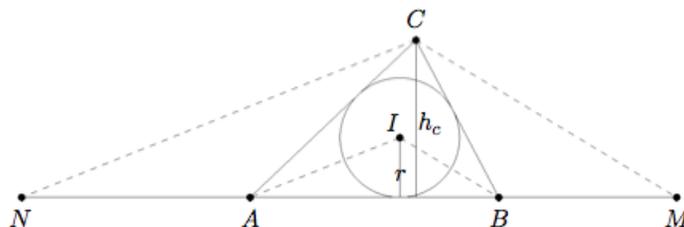
$$s = \sqrt[3]{\frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{6} \sqrt{\frac{4a+3}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{a+1}{2} - \frac{a+3}{6} \sqrt{\frac{4a+3}{3}}},$$

es independiente del valor de  $a$ . Calcula el valor de dicha suma.

- 114.** Encuentra todas las funciones  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que satisfacen la igualdad  $f(n) + 2f(f(n)) = 3n + 5$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- 115.** Sean  $(a, b)$  pares de números reales tales que la ecuación  $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$  tiene al menos una solución real. Calcula el valor mínimo de la suma  $a^2 + b^2$  de tales parejas.
- 116.** Sea  $ABC$  un triángulo cuyos lados (opuestos a cada vértice) denotaremos por  $a, b$  y  $c$ . Sobre la prolongación del lado  $c$  dibujamos el punto  $N$  de modo que el segmento  $AN$  sea igual al lado  $b$  y el punto  $M$  de modo que el segmento  $BM$  y el lado  $a$  también sean iguales. Si el punto  $I$  de la figura representa el incentro del triángulo, apóyate en la figura para probar que la altura  $h_c$  sobre el lado  $c$  se puede expresar mediante la fórmula:

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$$

donde  $p$  es el semiperímetro del triángulo.



---

<sup>1</sup>Principio de Palomar: si tenemos  $n + 1$  palomas y  $n$  nidos, en un nido hay por lo menos 2 palomas.