

Seminario de problemas Bachillerato. Curso 2013-14. Hoja 18

119. Sean x_1, x_2 las raíces del polinomio $P(x) = 3x^2 + 3mx + m^2 - 1$, siendo m un número real. Probar que $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

120. Sean x, y números reales positivos y n un número natural. Probar que

$$(x + y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

121. En un triángulo de lados a, b, c , el lado a es la media aritmética de b y c . Probar:

a) $0^\circ \leq A \leq 60^\circ$.

b) La altura relativa al lado a es tres veces el inradio r .

c) La distancia del circuncentro al lado a es $R - r$.

122. Supón que los cinco triángulos “verticales” ABC , BCD , CDE , DEA y EAB de un pentágono convexo $ABCDE$ tienen todos ellos área 1. Prueba que el área del pentágono es igual a $\sqrt{5} \cdot \phi$, donde $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ es el *número áureo*.

123. Las raíces de la ecuación $x^3 - 16x^2 + 81x - 128 = 0$ son las longitudes de los lados de un triángulo. Encuentra el área del triángulo.

124. Tenemos 101 rectángulos con lados de longitud entera no mayor que 100. Prueba que entre ellos hay tres, digamos R , S y T , tales que R cabe dentro de S y S cabe dentro de T .

125. Dado un entero positivo N consideramos el problema de encontrar números enteros positivos cuya suma sea N y cuyo producto tenga el máximo valor posible. Llamamos $P(N)$ a este producto máximo. Prueba que $P(5) = 2 \times 3$, $P(6) = 3^2$, $P(7) = 2^2 \times 3$, $P(8) = 2 \times 3^2$ y $P(9) = 3^3$. Encuentra $P(1000)$ explicando tu resultado.