Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 17

97. Encontrar todos los números enteros positivos $\boldsymbol{n}$ de modo que el número que resulte al añadirle un uno a la derecha de n sea múltiplo estricto del que resulte al añadirle un uno a la izquierda de n.

98. Sea $\boldsymbol{m}$ un número entero positivo. Determinar todos los números enteros $0 \leq d \leq m$ para que la progresión aritmética $\{a_i\}$ de números enteros no negativos con $a_1 = m$ y diferencia d cumpla que $\left\{{a_i}^k\right\} \subset \{a_i\}\ \forall k \geq 2$. Es decir, que cualquier npotencia entera de un término de la progresión, sea también un término de la progresión.

99. Tenemos un punto en el plano P_0 y un polígono regular de n lados $A_1 A_2 \dots A_n$.

a) Definimos P_{k+1} con $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ como la imagen de P_k por la rotación de centro A_{k+1} y ángulo $\frac{360^{\text{O}}}{n}$ en sentido horario. Demostrar que $P_n = P_0$

b) Probar que esto no se cumple si los giros son en sentido antihorario.

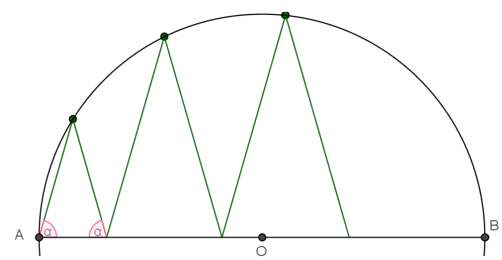
100. Sea el polinomio:

$$x^{2016} + a_{2015}x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Dos personas juegan por turnos a elegir un coeficiente a_i que no haya sido elegido anteriormente y poner en su lugar un número entero no nulo. Si el polinomio resultante después de colocar los 2016 coeficientes tiene, como máximo, una raíz, gana el primer jugador; si tiene más de una raíz, gana el segundo. Dar una estrategia ganadora para el primer jugador.

101. En una semicircunferencia de diámetro AB de longitud 2 se construye una línea quebrada que partiendo de A tiene sus vértices alternativamente en el diámetro y en la semicircunferencia de modo que los lados de la línea quebrada forman ángulos iguales con el diámetro, pero alternativamente en uno y otro sentido.

Determina la longitud de la poligonal para todos los casos en que ésta pase por el otro extremo del diámetro, en función de α



102. Sea c_R una circunferencia de centro O y radio R y, $c_1\, y\, c_2$ dos circunferencias también de radio R y tangentes en O. Construimos la sucesión de circunferencias $\{d_i\}$, ver figura adjunta, de modo que:

- d_1 es una circunferencia tangente interior a c_R y tangente exterior a $c_1\, y\, c_2$
- $d_i\ con\ i > 1$ es una circunferencia tangente exterior a d_{i-1} , $c_1\, y\, c_2$

Determina el valor de R, para que la circunferencia d_{2016} tenga de diámetro $\frac{1}{2016}$