

Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 16

91. ¿De cuántas maneras se pueden elegir tres números distintos del conjunto $\{1, 2, \dots, 99, 100\}$ de modo que no haya entre ellos dos consecutivos?
92. En el triángulo ABC tenemos que $AC = CB$. En el lado AB hay un punto D tal que el radio del círculo inscrito en el triángulo ACD es igual al radio del círculo tangente a la vez al segmento DB y a las prolongaciones de los segmentos CD y CB . Prueba que ese común radio mide la cuarta parte de una cualquiera de las dos alturas del triángulo ABC que son iguales.
93. Una sucesión a_n está definida por $a_0 = 9$ y $a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3$. Prueba que a_{10} contiene más de 1000 nueves en notación decimal.
94. La bisectriz interior del ángulo A del triángulo ABC corta a la circunferencia circunscrita en el punto A_1 . Los puntos B_1 y C_1 quedan definidos similarmente. La recta AA_1 concurre con las bisectrices exteriores de los ángulos B y C en el punto A_0 . Los puntos B_0 y C_0 quedan definidos similarmente. Prueba las relaciones

$$\text{área del } \triangle A_0B_0C_0 = 2 \cdot (\text{área del hexágono } AC_1BA_1CB_1) \geq 4 \cdot (\text{área del } \triangle ABC).$$

95. Sean a , b y c números positivos. Demuestra la desigualdad

$$\frac{a+b}{\sqrt{a+3b+2c}} + \frac{b+c}{\sqrt{b+3c+2a}} + \frac{c+a}{\sqrt{c+3a+2b}} \geq \sqrt{2(a+b+c)}.$$

96. Sea ABC un triángulo equilátero y sean D , E y F los puntos en los lados AB , BC y AC , respectivamente, tales que $AD = 2$, $AF = 1$ y $FC = 3$. Si el triángulo DEF tiene el mínimo perímetro posible, ¿cuánto mide AE ?