

## Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 14

---

79. (a) Prueba que en cualquier conjunto de 27 números impares distintos, todos ellos menores que 100, habrá dos que sumen 102.

(b) ¿Cuántos conjuntos de 26 números impares distintos, todos ellos menores que 100, pueden formarse de modo que ninguna pareja en ninguno de esos conjuntos tenga una suma igual a 102?

80. El triángulo  $ABC$  tiene un ángulo recto en el vértice  $C$ .  $P$  es un punto del segmento  $AC$  tal que los triángulos  $PBA$  y  $PBC$  tienen sus correspondientes círculos inscritos del mismo radio. Expresa la longitud  $x = PC$  en términos de las longitudes de los lados del triángulo  $ABC$ .

81. ¿Para qué enteros no negativos  $n$  y  $k$  es divisible por 5 el número

$$(k+1)^n + (k+2)^n + (k+3)^n + (k+4)^n + (k+5)^n ?$$

82. Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo. Se construyen tres rectas  $\ell_A$ ,  $\ell_B$  y  $\ell_C$  que pasan por los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente, de acuerdo con la siguiente prescripción: Sea  $H$  el pie de la altura trazada desde el vértice  $A$  al lado  $BC$ ; sea  $\gamma_A$  la circunferencia de diámetro  $AH$ ; la circunferencia  $\gamma_A$  corta al lado  $AB$  en  $M$  y al lado  $AC$  en  $N$ , siendo  $M$  y  $N$  distintos del punto  $A$ . Entonces,  $\ell_A$  es la recta que pasa por  $A$  y es perpendicular a  $MN$ . Las rectas  $\ell_B$  y  $\ell_C$  se construyen análogamente. Probar que las rectas  $\ell_A$ ,  $\ell_B$  y  $\ell_C$  concurren en un mismo punto.

83. (a) Sea  $f(x, y, z) = x + 2y + 4z$ , donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  son números reales. Hallar el máximo valor de  $f(x, y, z)$  si  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ .

(b) Hallar el mínimo valor de  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2/2$  si  $x$ ,  $y$  y  $z$  son números reales tales que  $x + y + z = 10$ .

84. En la figura vemos un cuadrado que contiene en su interior un triángulo equilátero que a su vez contiene en su interior un cuadrado. Se nos ocurren dos preguntas: (a) El triángulo equilátero interior al cuadrado, ¿es el mayor triángulo equilátero que cabe dentro del cuadrado? (b) El cuadrado interior al triángulo equilátero, ¿es el mayor cuadrado que cabe dentro del triángulo?

