

Seminario de problemas. Curso 2023-24. Hoja 12

- 123.** Los sudokus normales son de tamaño 9×9 (con 9 filas, 9 columnas, y 9 bloques de tamaño 3×3), y hay que rellenarlos con números del 1 al 9 con un número en cada celda, de forma que cada fila, cada columna y cada bloque contenga los números $\{1, 2, \dots, 9\}$ exactamente una vez. El número de formas distintas de rellenar un sudoku 9×9 es enorme, y nada fácil de calcular. De manera similar, un sudoku 4×4 hay que rellenarlo con números del 1 al 4, por ejemplo

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

Por supuesto, estudiar esto es mucho más sencillo. ¿Cuántos sudokus 4×4 válidos hay?

- 124.** Dado a es un entero impar, demostrar que

$$a^4 + 4a^3 + 11a^2 + 6a + 2$$

es una suma de tres cuadrados y es divisible entre 4.

- 125.** Sean a, b, c tres enteros positivos tales que

$$\frac{a + b + c}{abc} = \frac{1}{k}$$

para cierto entero k . Demostrar lo siguiente:

- (1) $a^3 + b^3 + c^3$ no es primo.
- (2) Para cada k entero positivo existen a, b, c que satisfacen esa igualdad.

- 126.** Determinar el valor de la siguiente suma:

$$S = \frac{5}{5 + 25^{1/2024}} + \frac{5}{5 + 25^{2/2024}} + \dots + \frac{5}{5 + 25^{2023/2024}}.$$

- 127.** Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) + 2f(-x) = (1 + x)^2 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

- 128.** Hallar todos los pares de números reales (x, y) que cumplen la ecuación

$$x^2 + 2x \operatorname{sen}(xy) + 1 = 0.$$

- 129.** Sea \mathcal{S} un conjunto de enteros positivos que cumple lo siguiente:

- (1) $1 \in \mathcal{S}$.
- (2) Para n par, si $n \in \mathcal{S}$ también $n - 1 \in \mathcal{S}$.
- (3) Para n impar, si $n \in \mathcal{S}$ también $2^k n \in \mathcal{S}$ para $k = 1, 2, 3, 4, \dots$.

Prueba que $\mathcal{S} = \mathbb{N}$.

¿Qué ocurre si cambiamos la segunda condición por esta otra?:

- (2') Para $n > 1$ par, si $n \in \mathcal{S}$ también $(n - 1)/3 \in \mathcal{S}$ siempre que $(n - 1)/3$ sea un entero.

(No intentes afirmar nada con seguridad en este caso, nadie sabe la solución.)

Nota: Varios problemas de esta hoja están sacados de la web «Página de Matemáticas: Página de preparación de problemas» de José Miguel Manzano, <https://wpd.ugr.es/~jmmanzano/preparacion/problemas.php>