Seminario de problemas. Curso 2022-23. Hoja 12

103. Las 10 parejas de números (una por cada línea)

29	31
105 29	105 31
141 105 29	141 105 31
237 141 105 29	237 141 105 31
453 237 141 105 29	453 237 141 105 31
132 453 237 141 105 29	132 453 237 141 105 31
504 132 453 237 141 105 29	504 132 453 237 141 105 31
162 504 132 453 237 141 105 29	162 504 132 453 237 141 105 31
813 162 504 132 453 237 141 105 29	813 162 504 132 453 237 141 105 31
411 813 162 504 132 453 237 141 105 29	411 813 162 504 132 453 237 141 105 31

son primos gemelos. Nótese que los trozos $105, 141, \ldots$ que se van añadiendo siempre son múltiplos de 3. ¿Es obligatorio hacerlo así para obtener primos gemelos?

104. Prueba que cada $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1/4, 2/4, 3/4, 1\}$, $0 \leq r \leq 1$, se puede escribir como

$$r = \frac{m^2}{4nM}$$

con las condiciones $n, m, M \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $\operatorname{mcd}(n, m) = 1$.

105. La hipotenusa de un triángulo rectángulo (en un examen estándar americano) mide 10 pulgadas, la altura proyectada sobre ella mide 6 pulgadas. Calcular el área del triángulo.

Los estudiantes americanos se habían enfrentado a este problema durante décadas, pero llegaron estudiantes rusos, de Moscú, y ninguno de ellos fue capaz de encontrar la respuesta como lo hacían sus compañeros americanos (quienes daban como respuesta 30 pulgadas cuadradas). ¿Por qué?

106. La distancia entre las ciudades A y B es de 40 km. Dos ciclistas salen respectivamente de A y de B a la vez, dirigiéndose el uno hacia el otro, uno con velocidad de 10 km/h y el otro con velocidad de 15 km/h. Una mosca sale desde el primer ciclista cuando está en A volando a una velocidad de 100 km/h, toca la frente del segundo, vuelve a volar hasta la frente del primero, regresa hasta la del segundo, y continúa así hasta que las frentes de los ciclistas se chocan y aplastan a la mosca. ¿Cuántos kilómetros ha volado en total la mosca?

107. Calcular la siguiente suma:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

108. Los números de Fibonacci forman la sucesión $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$, en la que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ (a_n es el enésimo término de la sucesión). Encontrar el máximo común divisor de los números a_{100} y a_{99}.

109. En un torneo participan n equipos, los que pierden abandonan la competición, y el ganador se decide tras $n-1$ encuentros. El cuadro del torneo se puede escribir de forma simbólica como, por ejemplo, $((a, (b, c)), d)$ que significa que b juega contra c, y el ganador se cruza con a, y el ganador de éstos con d.

- Para 2 equipos, sólo puede ser (a, b), así que ése es el único cuadro que hay.
- Para 3 equipos puede ser $((a, b), c)$, o $((a, c), b)$, o $((b, c), a)$, luego hay 3 posibles cuadros.
- Para 4 equipos:

$$\begin{array}{llll}
(((a,b),c),d) & (((a,c),b),d) & (((a,d),b),c) & (((b,c),a),d) \\
(((b,d),a),c) & (((c,d),a),b) & (((a,b),d),c) & (((a,c),d),b) \\
(((a,d),c),b) & (((b,c),d),a) & (((b,d),c),a) & (((c,d),b),a) \\
((a,b),(c,d)) & ((a,c),(b,d)) & ((a,d),(b,c)) &
\end{array}$$

¿Cuántos cuadros distintos hay para 10 equipos?

Nota: Varios problemas de esta hoja están sacados del conocido libro *Problemas para jóvenes de 5 a 15 años* de V. I. Arnold, que está disponible (en varios idiomas) en `https://github.com/IMAGINARY/Arnold5to15`