

Seminario de problemas Curso 2015-16. Hoja 12

- 67.** Dentro de un cuadrilátero convexo, de vértices A, B, C, D y área 168, se encuentra situado un punto P tal que $PA = 9$, $PB = PD = 12$ y $PC = 5$. Determínese el perímetro del cuadrilátero.
- 68.** Si n es un número natural, el n -ésimo número triangular es $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Hállense todos los valores de n para los que el producto de los 16 números triangulares consecutivos $T_n T_{n+1} \cdots T_{n+15}$ es un cuadrado perfecto.
- 69.** Sean a_1, a_2, \dots, a_n números reales no negativos tales que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k.$$

¿Cuál es el valor máximo de $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \cdots + a_{n-1} a_n$?

- 70.** Sea \mathbb{N} el conjunto de los números naturales y $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función tal que

$$f(f(n)) + 2f(n) = 3n + 4,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Determínese $f(2016)$.

- 71.** Sea $M = \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ y k un entero positivo. Encuéntrese el menor valor de k para el cual cualquier subconjunto de M con k elementos contiene al menos dos números distintos de manera que uno de ellos es múltiplo del otro.
- 72.** En un triángulo $\triangle ABC$ dibujamos las alturas, AA_1, BB_1, CC_1 , y las medianas, AA_2, BB_2, CC_2 . Demuéstrese que la longitud de la línea poligonal $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2 A_1$ es igual al perímetro del triángulo.