Seminario de problemas Curso 2023-24 Hoja 11

Las matemáticas Wasan

El término *Wasan* se refiere a un tipo concreto de matemáticas que se desarrolló en Japón durante el periodo Edo (entre 1600 y 1867 aproximadamente), cuando estas islas estaban aisladas de las influencias europeas. El término Wasan viene de las palabras *wa* (japonés) y *san* (cálculo) y se usó para distinguir este tipo de matemáticas de las que llegaban de Occidente (*Yosan*). Al comienzo del periodo imperial (1868–1945), el país se abrió a las nuevas tendencias que llegaban de Europa y adoptó la matemática occidental, lo que propició el desuso de las ideas y técnicas del Wasan.

La enseñanza del Wasan estaba abierta a todo el mundo. Por ejemplo, era común encontrarse en los tempos unas tablillas de madera con problemas de matemáticas, muchos de ellos con la circunferencia como protagonista. Son los conocidos como *Sangaku*. Mostramos algunos de ellos en esta hoja de problemas.

Se recomienda resolver los ejercicios de esta hoja por orden, ya que también contiene algunos problemas auxiliares que pueden ser usados como ayuda o pista para resolver los Sangaku que aparecen a continuación.

116. Un triángulo equilátero de lado a se inscribe en una circunferencia de radio R. Prueba que $R = \sqrt{3}/3a$.

117. (Sangaku de Katayamahiko). Tres circunferencias del mismo radio r son tangentes entre sí e inscritas en otra circunferencia de radio r' (véase la figura 1). Demuestra que

$$r' = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) r.$$

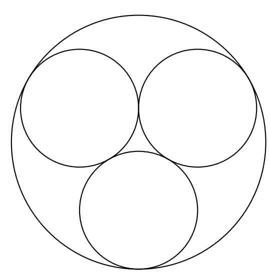

Figura 1: Sangaku de Katayamahiko

118. Se consideran dos circunferencias de radios r_1 y r_2 ($r_1 > r_2$) tangentes entres sí y tangentes a una misma recta en los puntos A y B. Si d es la distancia entre A y B, demuestra que $d^2 = 4r_1r_2$.

119. (Sangaku de Gunma). Se inscribe una tercera circunferencia de radio r, tangente a las dos anteriores y a la misma recta (véase la figura 2). Prueba que

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

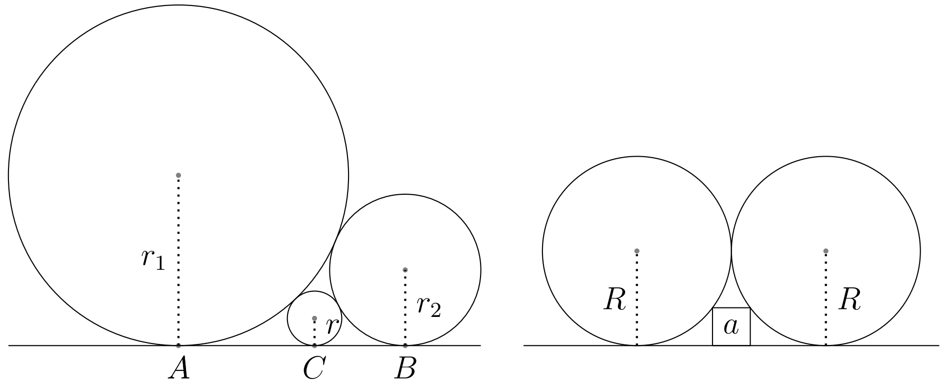

Figura 2: Sangaku de Gunma y su variante.

120. Para dibujar el Sangaku de la figura 2, un artista quiere emplear valores enteros positivos distintos entre sí para los 3 radios, r, r_1 y r_2. Propón cuatro ternas diferentes de posibles radios (r_1, r_2, r).

121. (Variante del Sangaku de Gunma). Se consideran 2 circunferencias de radio R, tangentes entres sí y tangentes a una misma recta. Se inscribe un cuadrado de lado a entre las dos circunferencias y la recta (véase la figura 2). Calcula el valor del cociente R/a.

122. (Sangaku de los círculos consecutivos). En un sector circular de ángulo 2α se inscriben dos circunferencias tangentes entre sí de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), como se muestra en la figura 3.

- Prueba que las rectas EG y FG son perpendiculares.
- Prueba que [1]

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha}.$$

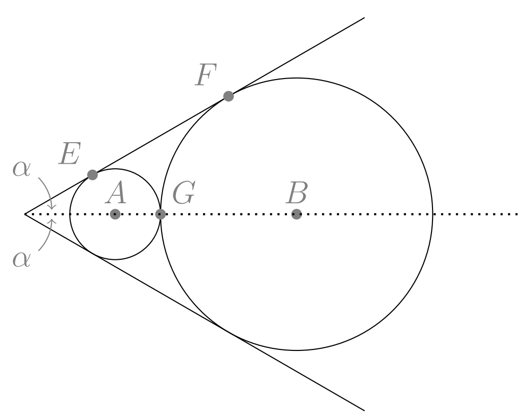

Figura 3: Sangaku de los círculos consecutivos.

[1] En un triángulo rectángulo, el seno de un ángulo α, $\operatorname{sen}\alpha$, es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.