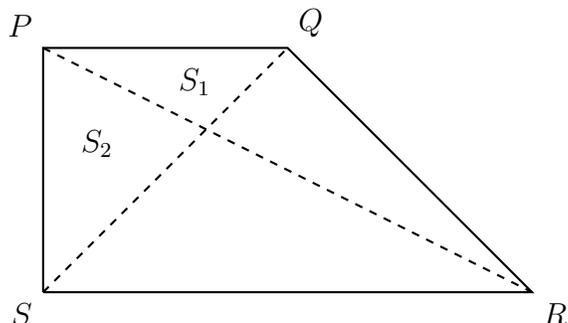


## Seminario de problemas Curso 2016-17. Hoja 11

67. Consideramos un trapecio rectángulo  $PQRS$ , similar al problema 1, en el que se trazan las dos diagonales. Sean  $S_1$  y  $S_2$  las áreas de los triángulos que se muestran en la figura. Determina el ratio  $S_2/S_1$  para que el área del trapecio sea  $100S_1$ .



68. ¿Pueden existir triángulos rectángulos cuyos tres lados sean números enteros y una de sus alturas mida 2017? Encuéntralos en caso afirmativo o prueba que no existen en otro caso.
69. Prueba que dado un conjunto de 10 números distintos de dos cifras, es posible seleccionar dos subconjuntos disjuntos cuyos miembros tengan la misma suma.
70. Dados 4 números reales distintos  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$ , resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1. \end{cases}$$

71. Encuentra el mayor número entero  $N$  que cumple las siguientes condiciones:

- $\lfloor \frac{N}{2017} \rfloor$  tiene sus tres cifras iguales.
- $\lfloor \frac{N}{2017} \rfloor$  es suma de números naturales consecutivos empezando en 1, es decir,

$$\left\lfloor \frac{N}{2017} \right\rfloor = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

para algún  $n \in \mathbb{N}$ .

Nota:  $\lfloor x \rfloor$  denota la parte entera de un número real  $x$ .

72. El Bueno, el Feo y el Malo. Estos tres pistoleros acuerdan batirse en duelo con unas reglas poco usuales. Echan a suertes quien dispara primero, segundo y tercero. Se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero de 20.17 metros de lado. Deciden que irán disparando en el orden establecido (un único disparo en cada turno) y que continuarán disparando hasta que dos de ellos hayan muerto. En cada turno el pistolero al que le toca disparar puede hacerlo donde quiera. Los tres saben que el Malo siempre acierta en su objetivo, el Feo tiene un porcentaje de aciertos del 80% y el Bueno del 50%.

Suponiendo que cada uno de ellos elige la mejor estrategia cuando le toca disparar y que nadie muere por disparos de rebote ni por otras situaciones, ¿quién tiene más posibilidades de sobrevivir al duelo? ¿Cuáles son las probabilidades de sobrevivir de cada uno de los tres pistoleros?