Sesión de Preparación de Olimpiada Matemática.

Seminario de problemas Curso 2024-25. Hoja 10

1.-Algunas desigualdades básicas.

1) $x^2 \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. La igualdad sólo se cumple para $x = 0$.

2) (Desigualdad triangular) Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

La igualdad se cumple si, y sólo si, $xy \geq 0$.

3) Medias: aritmética (A), geométrica (G), armónica (H) y cuadrática (Q): Si $a, b > 0$,

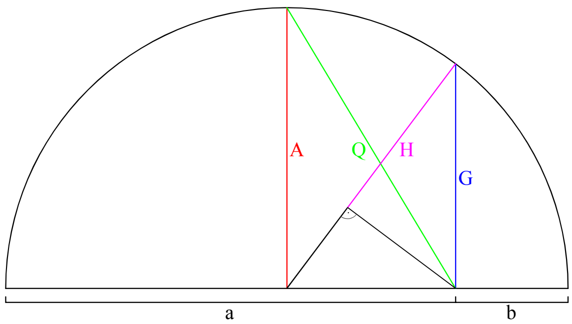
$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) = \sqrt{ab}, \quad H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad Q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Entonces

$$\boxed{\min\{a,b\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max\{a,b\}}$$

y las igualdades se cumplen si y sólo si $a = b$.

Las desigualdades entre las medias tienen la visualización adjunta. Dicha visualizacin también muestra cuánto se parecen y cuánto se diferencian en función de lo parecidos o diferentes que sean a y b.



Cada una de las desigualdades involucradas en $H \leq G \leq A \leq Q$ son equivalentes entre si y equvalentes a la desigualdad $(a-b)^2 \geq 0 \ \equiv \ 2ab \leq a^2 + b^2$ (y que la igualdad se cumple sólo, y exclusivamente, para $a = b$). También puede considerarse una interpretación geométrica en términos de áreas y perímetros de rectángulos.

- puesto que ab es el área de un rectágulo de lados a y b (perímetro $= 2(a+b)$) y $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ es el área del cuadrado que tiene dicho perímetro (lado $= \frac{a+b}{2}$), la desigualdad

$$H \leq A \ \equiv \ \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} \ \equiv \ ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

  nos dice que el área del rectágulo es menor o igual que la del cuadrado del mismo perímetro. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a = b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene mayor área es el cuadrado.*

- Puesto que $2(a+b)$ es el perímetro de un rectángulo de lados a y b (área $= ab$) y el perímetro del cuadrado que tiene área ab (lado $= \sqrt{ab}$) es $4\sqrt{ab}$ la desigualdad

$$G \leq A \;\equiv\; \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \;\equiv\; 4\sqrt{ab} \leq 2(a+b),$$

nos dice que el perímetro del del rectángulo es menor o igual que la cuadrado del mismo área. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a = b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un área dada, el que tiene menor perímetro es el cuadrado.*

4) (Reordenamiento) Si $a \leq b$ y $x \leq y$, entonces $\boxed{ay + bx \leq ax + by.}$

Ejercicio 1.

a) Demuestra la desigualdad triangular y que $|x-y| \geq ||x| - |y||$ para $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Demuestra la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Interpreta geométricamente la desigualdad en términos de áreas. ¿Cuándo se verifica la igualdad?

c) Demuestra e interpreta la desigualdad del reordenamiento.

Ejercicio 2. *(Completando cuadrados)* Demuestra las siguientes desigualdades:

a) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.

b) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

c) Si $x > 0$ entonces $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$. Demuestra que la suma $x + y$ con $xy = 1, x > 0$, es mínima cuando $x = y = 1$. Interpreta geométricamente el resultado.

d) Si $0 < x < 2$ entonces $x(2-x) \leq 1$. Demuestra que el producto xy con $x + y = 2, x, y > 0$, es máximo cuando $x = y = 1$. Intepreta geométricamente el resultado.

Ejercicio 3. Demuestra las siguientes desigualdades:

a) Si $0 \leq x \leq y \leq 1$ entonces $0 \leq xy^2 - x^2y \leq \frac{1}{4}$.

b) Si $x, y > 0$ entonces $\sqrt{\dfrac{x^2}{y}} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Ejercicio 4. *(OME-1984)* Dados dos números reales positivos p, q tales que $p + q = 1$, y sabiendo que todo par de números reales x, y cumple $(x-y)^2 \geq 0$, se pide demostrar

a) si $x, y > 0$, entonces $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

b) $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$.

c) si $p, q > 0$ y $p + q = 1$, entonces $\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

Ejercicio 5. *(OME-1978)* Se dan los números $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Demostrar, sin necesidad de calcular derivadas que el valor de X que hace mínima la suma

$$(X - A_1)^2 + \cdots + (X - A_n)^2$$

es precisamente la media aritmética de los números dados.

2.- La desigualdad de Cauchy-Schwarz.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que para dos conjuntos de n números reales, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se verifica que

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \cdots + b_n^2\right).$$

La igualdad se cumple si y sólo si las $n-$uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son una múltiplo de la otra.

Podemos suponer que alguno de los $a_k \neq 0$. Puede demostrarse la desigualdad de Cauchy-Schwarz estudiando la gráfica del polinomio de segundo grado dado por

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2.$$

Puesto que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$0 \leq p(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

la gráfica/parábola $y = p(x) = Ax^2 + Bx + C$ esá por encima del eje OX, o es tangente a él. Por tanto, el discriminante

$$\Delta = B^2 - 4AC \leq 0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

El caso $B^2 = 4AC$, que se corresponde con que la parábola sea tangente a OX, es equivalente a que se verifique la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz y se da cuando $p(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$. Es decir, cuando existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$b_k = -x_0 a_k, \; k = 1, \ldots, n,$$

o lo que es lo mismo $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ es un múltiplo de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Ejercicio 6. *(OME-1971)* Si $0 < p, 0 < q$ y $p + q < 1$, demostrar que $(px + qy)^2 \leq px^2 + qy^2$.

Ejercicio 7. Demostrar que si a, b, x, y son números reales y $a, b > 0$ entonces

$$\frac{(x+y)^2}{a+b} \leq \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}.$$

Ejercicio 8. *(OME, 1980)* Demostrar que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos, entonces

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

¿Cuándo es válida la igualdad?

Ejercicio 9. Demuestra que

$$\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \leq 1$$

para todos los números reales positivos a, b, c.

Ejercicio 10. Deducir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz la **desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática**: Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos se verifica que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Ejercicio 11. Dado un número natural $n \geq 2$ considere todos los números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ tales que

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 1.$$

Hallar el mayor valor posible y el menor valor posible de

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Antes de considerar el caso general $n \geq 2$, considere el caso $n = 2$ dando una interpretación geométrica.
