

Seminario de problemas. Curso 2019-20. Hoja 10 (Polinomios y funciones)

- 97.** Hallar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean los cuadrados de las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.
- 98.** Probar que no existe ningún polinomio no constante P de coeficientes enteros tal que $P(n)$ sea primo para todo entero no negativo n .
- 99.** Sean $A_0, \dots, A_{n-1}$ los vértices de un n -ágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1.

- a) Calcular el valor del producto $\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \cdots \overline{A_0A_{n-1}}$.
- b) Hallar el valor máximo del producto $\overline{PA_0} \cdot \overline{PA_1} \cdots \overline{PA_{n-1}}$ cuando P recorre la circunferencia.

(Pista: raíces de la unidad.)

- 100.** Sea P un polinomio. Probar que P es una función par si y sólo si existe un polinomio Q tal que

$$P(x) = Q(x)Q(-x).$$

- 101.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para todo x real se cumple

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4.$$

- 102.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ que verifican

$$f(n) + f(n+1) = 2n + 1$$

para cualquier entero n y además

$$\sum_{k=1}^{63} f(k) = 2015.$$

- 103.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que

$$f(xf(y)) = yf(x)$$

para todos x, y reales positivos, y además $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

- 104.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen la desigualdad

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z),$$

para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$.