

Seminario de problemas. Curso 2018-19. Hoja 10 (Ecuaciones funcionales)

- 82.** Halla todas las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, para todos x e y ,

$$f(f(y) + xf(x)) = y + f(x)^2.$$

- 83.** Halla todas las funciones $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que, para cada n ,

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$

- 84.** Si para todos x e y

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

y sabemos que $a = f(0)$ y $b = f(1)$, determina el valor de $f(x)$ para cada $x \in \mathbb{Q}$.

- 85.** Halla todas las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, para todos x e y ,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{y} \quad f(x^{2019}) = f(x)^{2019}.$$

- 86.** Encuentra una función $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ que para todos x e y cumpla que

$$f(xf(y)) = f(x)/y. \quad (\text{IMO 1992})$$

- 87.** Se define una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como sigue:

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3, \quad f(2n) = f(n),$$

$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n), \quad f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).$$

¿Cuántos números n cumplen que $f(n) = n$ y $n \leq 2019$? (IMO 1988)

[Pista: expresa el valor de n y $f(n)$ en binario.]

- 88.** Halla todas las funciones $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que, para todos x e y ,

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1). \quad (\text{OME 2018})$$