DESIGUALDADES CLÁSICAS

PARA EL SEMINARIO DE PROBLEMAS (CURSO 2017/2018)
ALBERTO ARENAS

1. Desigualdades entre medias

La estrategia más general para probar desigualdades es transformar la desigualdad a la que nos enfrentamos en una cuya veracidad sepamos de antemano. Por ejemplo, sabemos que el área de un cuadrado es siempre no negativa; en realidad para cualquier número real x se tiene que $x^2 \geq 0$, cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = 0$. Supongamos entonces que queremos probar la desigualdad

$$2ab \leq a^2 + b^2 \tag{1}$$

para a y b números reales. Si la reordenamos obtenemos la desigualdad equivalente

$$2ab \leq a^2 + b^2 \iff 0 \leq a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2,$$

que sabemos es cierta. Por supuesto la igualdad se cumple si y solo si $a - b = 0$, es decir, $a = b$.

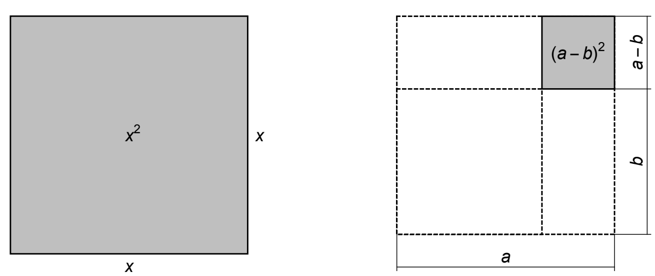

Figura 1. Representación geométrica de x^2 como el área de un cuadrado de lado x. A la derecha una representación geométrica de la bien conocida identidad notable $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

El problema reside en que a veces el número de pasos para transformar nuestra desigualdad en una del tipo $x^2 \geq 0$ es muy grande. Por eso es normal utilizar las desigualdades equivalentes que veremos a continuación.

Desigualdad GM-AM. Tomando $a = \sqrt{x}$ y $b = \sqrt{y}$, con x e y no negativos, en la desigualdad (1) obtenemos

$$2\sqrt{xy} \leq x + y \iff \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2},$$

dándose la igualdad si y solo si $x = y$. La parte de la izquierda es la *media geométrica* de los números x e y, mientras que la parte de la derecha es la *media aritmética* de x e y. Por eso, a la anterior desigualdad se la conoce como desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética, o simplemente desigualdad GM-AM —por sus siglas en inglés: «geometric mean» y «arithmetic mean»—. En realidad la **desigualdad GM-AM** es cierta para cualesquiera números $x_1, \ldots, x_n$ reales no negativos y viene dada por

$$\boxed{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},}$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $x_1 = \cdots = x_n$.

Ejemplo 1.1. *De todos los ortoedros de área A fija, el cubo es el de mayor volumen.*

Sean a, b y c la anchura, altura y profundidad, respectivamente, de un ortoedro con área A y volumen V. Es claro que

$$A = 2(ab + bc + ac) \qquad \text{y} \qquad V = abc.$$

Utilizando la desigualdad GM-AM con $x_1 = a$, $x_2 = b$ y $x_3 = c$ obtenemos

$$A = \frac{6}{3}(ab + bc + ac) \geq 6(a^2b^2c^2)^{1/3} = 6V^{2/3} \iff V \leq \left(\frac{A}{6}\right)^{3/2}.$$

La hipótesis de que el área A es fija significa que la cantidad $(A/6)^{3/2}$ también lo es; este detalle es importante porque nos permite asegurar que el volumen será el mayor cuando se cumpla la igualdad. Como en la desigualdad GM-AM la igualdad se produce si y solo si $x_1 = x_2 = x_3$, esto nos lleva a que $ab = bc = ac$, es decir, $a = b = c$. Por eso el mayor volumen se alcanza cuando el ortoedro es un cubo. □

Desigualdad HM-GM. A partir de la desigualdad GM-AM podemos obtener otra desigualdad bien conocida. Supongamos que x e y son dos números reales positivos, entonces

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \iff \frac{2}{x+y} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}} \iff \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \iff \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy},$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = y$. La parte de la izquierda es la *media armónica* de los números x e y, razón por la cual a la desigualdad anterior se la conoce como desigualdad entre la media armónica y la media geométrica, o simplemente desigualdad HM-GM —en inglés la media armónica es «harmonic mean»—. En este caso también se tiene que la

desigualdad HM-GM es cierta para cualesquiera números $x_1, \ldots, x_n$ positivos y viene dada por

$$\boxed{\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},}$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $x_1 = \cdots = x_n$.

Ejemplo 1.2. *Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c=2$. Probar*

$$\frac{ab}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} + \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{ac}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} \leq 1.$$

Utilizando la desigualdad HM-GM tenemos que

$$\frac{\sqrt{(a+c)(b+c)}}{ab} = \sqrt{\frac{a+c}{ab} \cdot \frac{b+c}{ab}} \geq \frac{2}{\frac{ab}{a+c}\frac{ab}{b+c}} \iff \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c}\right) \geq \frac{ab}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}.$$

Análogamente

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c}\right) \geq \frac{bc}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c}\right) \geq \frac{ac}{\sqrt{(a+b)((b+c))}}.$$

Por comodidad a la hora de escribir denotamos por $f(a,b,c)$ la suma

$$f(a,b,c) = \frac{ab}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} + \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{ac}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}.$$

El resultado se sigue de sumar estas tres desigualdades que acabamos de obtener y teniendo en cuenta que $a+b+c=2$,

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} + \frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{ab+ac}{b+c} + \frac{ab+bc}{a+c} + \frac{bc+ac}{a+b}\right) = \frac{a+b+c}{2} = 1 \end{aligned}$$

□

Desigualdad AM-QM. La última de las desigualdades de este apartado la vamos a obtener tomando $a = x$ y $b = y$, con x e y reales no negativos, en la desigualdad (1). De este modo

$$2xy \leq x^2 + y^2 \iff (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \iff \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = y$. La parte de la derecha es la *media cuadrática* de los números x e y, por lo que a esta desigualdad se la conoce como desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática, o simplemente desigualdad AM-QM —por el término «quadratic mean» en inglés para la media cuadrática—. La **desigualdad AM-QM** es cierta para cualesquiera números $x_1, \ldots, x_n$ reales y viene dada por

$$\boxed{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}}$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $x_1 = \cdots = x_n$. No es necesario para que se cumpla la desigualdad, pero es usual suponer que todos los números son positivos.

Ejemplo 1.3. *Si a y b son dos números reales no negativos tales que $a + b \geq 1$, entonces $a^4 + b^4 \geq 1/8$.*

Vamos a utilizar la desigualdad AM-QM para dos números positivos en una versión un poco distinta. A partir de la que ya conocemos tenemos la desigualdad

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \iff \frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \iff \frac{(x+y)^2}{2} \leq x^2 + y^2,$$

que es equivalente; en el caso $x = a^2$ e $y = b^2$ obtenemos

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2,$$

y volviendo a utilizar la AM-QM dentro del cuadrado con $x = a$ e $y = b$

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{(a+b)^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}(a+b)^4 \geq \frac{1}{8},$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado la hipótesis $a + b \geq 1$. □

Las tres desigualdades que acabamos de ver se denominan **desigualdades de medias**. Las cuatro medias que hemos visto para $x_1, \ldots, x_n$ reales positivos se relacionan mediante la siguiente cadena de desigualdades

$$\boxed{\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}}$$

En la figura 2 puedes ver una representación geométrica de cada una de estas medias para dos números positivos x e y, y comprobar visualmente la anterior cadena de desigualdades. En general para r positivo se define **la media de orden r** por

$$M_r(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[r]{\frac{x_1^r + \cdots + x_n^r}{n}}.$$

Se cumple la desigualdad

$$M_r(x_1, \ldots, x_n) \leq M_s(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{si } r \leq s.$$

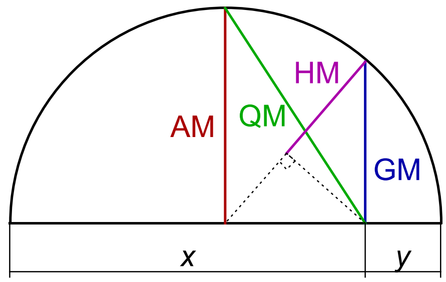

FIGURA 2. Las distintas medias para dos números positivos x e y: en magenta la media armónica, en azul la media geométrica, en rojo la media aritmética y en verde la media cuadrática.

Ejemplo 1.4. *Sean dos velocidades v_1 y v_2 distintas, ¿cómo se viaja más rápido entre dos puntos, yendo la mitad de la distancia a velocidad v_1 y la otra mitad a v_2, o yendo la mitad del tiempo a velocidad v_1 y la otra mitad a v_2?*

Sea d la distancia entre los dos puntos y t el tiempo invertido en ir desde uno hasta el otro. Como sabes la velocidad es el cociente de la distancia recorrida entre el tiempo empleado, y así $v_1 = d_1/t_1$ y $v_2 = d_2/t_2$ con $d = d_1 + d_2$ y $t = t_1 + t_2$.

El primer caso se corresponde con distancias $d_1 = d_2 = d/2$ y tiempos $t_1 = d/(2v_1)$ y $t_2 = d/(2v_2)$. Por tanto, la velocidad media en el recorrido desde A hasta B en el primer caso es

$$v_{\mathrm{I}} = \frac{d}{\frac{d}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}},$$

es decir, la media armónica de las velocidades v_1 y v_2. En el segundo caso las distancias son $d_1 = tv_1/2$ y $d_2 = tv_2/2$, y los tiempos $t_1 = t_2 = t/2$. De este modo, la velocidad media en el recorrido completo es

$$v_{\mathrm{II}} = \frac{\frac{t}{2}(v_1 + v_2)}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

es decir, la media aritmética de las velocidades v_1 y v_2.

Por la desigualdad HM-AM, la velocidad v_{I} en el primer caso es menor —igual no puede ser ya que v_1 y v_2 son distintas— que la velocidad v_{II} en el segundo caso y, por tanto, se viaja más rápido yendo la mitad de tiempo a una de las velocidades y la otra mitad a la otra. $\square$

---

2. La desigualdad triangular

Uno de los problemas geométricos más sencillos de resolver en el dibujo técnico es la construcción de un triángulo $\triangle ABC$ dados como datos sus tres lados a, b y c. La resolución consiste básicamente en fijar uno de los lados; por ejemplo el lado a, con vértices B yC, y hallar la localización del tercer vértice C como intersección de dos circunferencias: una con centro en B y radio c, y la otra con centro en C y radio b. Pero, ¿siempre se cortan las dos circunferencias?

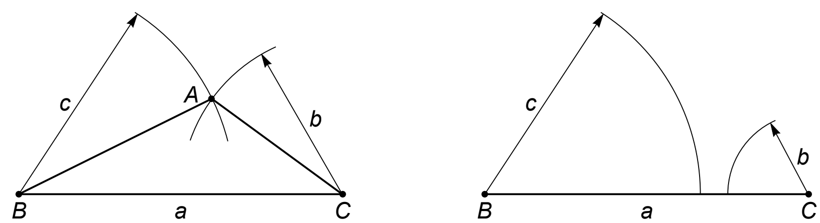

Figura 3. Construcción de un triángulo dados sus lados a, b y c. Si alguna de las desigualdades triangulares $a < b + c$, $b < a + c$ o $c < a + b$ no se cumple, entonces es imposible construir el triángulo.

Fijándonos en la figura 3, vemos que una vez dibujada la circunferencia de centro B y radio c, para que la otra circunferencia la corte debe cumplirse que $a - b \leq c$, es decir, $a \leq b + c$. En el caso $a = b + c$ el tercer vértice A está sobre el lado a y lo que se obtiene un triángulo degenerado en un segmento.

Este razonamiento se puede hacer exactamente del mismo modo si en lugar de fijar en primer lugar el lado a fijamos los lados b o c, obteniendo $b \leq a+c$ y $c \leq a+b$ respectivamente. Por tanto,

Si las longitudes de los lados de un triángulo son a, b y c, entonces
$a \leq b + c$, $b \leq a + c$ y $c \leq a + b$,

Ejemplo 2.1. *Sean a, b y c los lados de un triángulo. Probar $a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+ac+bc)$.*

A partir de las desigualdades triangulares tenemos que

$$a \leq b + c \iff a - b \leq c \iff a^2 + b^2 - 2ab \leq c^2,$$

y de manera análoga

$$b^2 + c^2 - 2bc \leq a^2 \quad \text{y} \quad a^2 + c^2 - 2ac \leq b^2.$$

Sumando estas tres desigualdades obtenemos el resultado deseado

$$2(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ac) \leq a^2 + b^2 + c^2 \iff a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ac). \quad \square$$

Pensemos ahora en dos números reales x e y cualesquiera. Como puedes ver en la figura 4, la desigualdad $|x| \leq y$ es equivalente a la cadena de desigualdades $-y \leq x \leq y$. Por otra parte, es claro que $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$; sumando estas dos cadenas obtenemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

que, como acabamos de decir, es equivalente a la desigualdad

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si x e y tienen el mismo signo. Aplicando esta desigualdad sucesivamente, es fácil obtener la **desigualdad triangular** para n números reales cualesquiera

$$\boxed{|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|,}$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente dependientes, es decir, $x_1 = \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ con $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$.

Figura 4. La desigualdad $|x| \leq y$ es equivalente a la cadena de desigualdades $-y \leq x \leq y$.

Desigualdad triangular inversa. Sean x e y dos números reales cualesquiera, entonces se cumple

$$\boxed{||x| - |y|| \leq |x + y|.}$$

Esta desigualdad triangular inversa es equivalente a la cadena de desigualdades

$$-|x + y| \leq |x| - |y| \leq |x + y|,$$

por lo que bastaría probar cada una de estas desigualdades. Pero esto se sigue fácilmente de la desigualdad triangular, ya que

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y| \iff |x| - |y| \leq |x + y|$$

y

$$|y| = |y + x - x| \leq |x + y| + |x| \iff -|x + y| \leq |x| - |y|.$$

Ejemplo 2.2. *Probar la desigualdad*

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

donde x_1, x_2, y_1 e y_2 son números reales. ¿Cuándo se cumple la igualdad?

En el plano (x, y) consideramos el triángulo que forman los puntos $O = (0, 0)$, $A = (x_1, y_1)$ y $C = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. La desigualdad que queremos probar no es más que la desigualdad triangular $OC \leq OA + AC$. La igualdad se cumple si y solo si $x_1 = \lambda x_2$ e $y_1 = \lambda y_2$ con λ real.

---

3. La desigualdad de Cauchy-Schwarz

Ocurre muchas veces en matemáticas que un resultado elemental tiene consecuencias difíciles de imaginar de antemano. Por ejemplo, sabemos que las soluciones de la ecuación cuadrática $at^2 + bt + c = 0$, con $a > 0$, vienen dadas por las reconocidas fórmulas

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependiendo de si $b^2 - 4ac$ es positivo, nulo, o negativo, la ecuación tiene dos soluciones reales, una solución real doble, o ninguna, respectivamente. Para ver esto observa que si $b^2 - 4ac = 0$ entonces t_1 y t_2 coinciden, mientras que si $b^2 - 4ac < 0$ entonces tanto t_1 como t_2 son números complejos. Geométricamente, el polinomio $y = at^2 + bt + c$ se corresponde con una parábola en el plano (t, y). En la figura 5 puedes ver representadas las tres situaciones que acabamos de comentar. Observa que el caso $b^2 - 4ac > 0$ es el único en el que la parábola tiene puntos por debajo del eje de abscisas; es decir:

> *Sea $a > 0$; la desigualdad $at^2 + bt + c \geq 0$ es cierta para todo t real si y solo si $b^2 - 4ac \leq 0$,*

cumpliéndose la igualdad en el punto $t = -b/(2a)$ si y solo si $b^2 - 4ac = 0$.

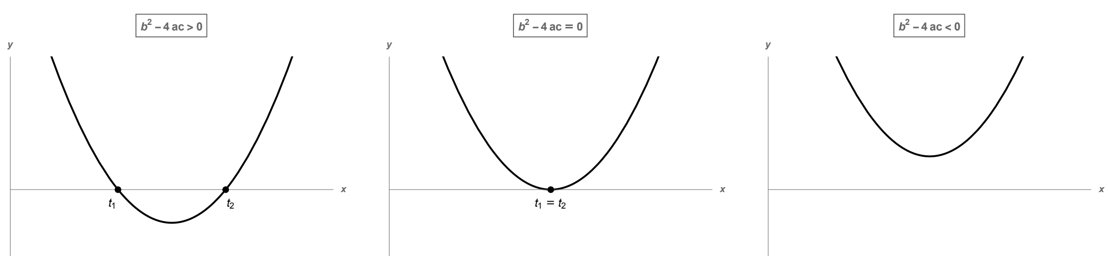

Figura 5. Representación geométrica de la raíces de un polinomio de segundo grado $at^2 + bt + c$, con a positivo. Cada una de las tres imágenes se corresponde con los distintos casos de existencia de dos, una o ninguna raíz.

Pensemos ahora en la siguiente suma de cuadrados

$$(x_1 t + y_1)^2 + \cdots + (x_n t + y_n)^2,$$

donde t es un número real, $x_1, \ldots, x_n$ números reales no todos nulos e $y_1, \ldots, y_n$ números reales cualesquiera. Ya sabemos que la suma es no negativa, y si desarrollamos cada uno de los cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x_1t + y_1)^2 + \cdots + (x_nt + y_n)^2 \\ &= x_1^2t^2 + y_1^2 + 2x_1y_1t + \cdots + x_n^2t^2 + y_n^2 + 2x_ny_nt \\ &= (x_1^2 + \cdots + x_n^2)t^2 + 2(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)t + y_1^2 + \cdots + y_n^2, \end{aligned}$$

es decir, una desigualdad del tipo $at^2 + bt + c \geq 0$ con

$$a = x_1^2 + \cdots x_n^2, \quad b = 2(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n), \quad \text{y} \quad c = y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$

Así que, como hemos visto, esta desigualdad implica que la desigualdad $b^2 - 4ac \leq 0$, que en nuestro caso es

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \leq 0,$$

también es cierta. La desigualdad que hemos obtenido suele suele reescribirse como

$$\boxed{(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2),}$$

y se denomina **desigualdad de Cauchy-Schwarz**. La igualdad se cumple si y solo si $x_i = \lambda y_i$, con λ real, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Ejemplo 3.1. *Sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_1 + \cdots + a_n = 1$, entonces*

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n.$$

Lo primero que vamos a hacer es reescribir la parte de la izquierda de manera que podamos utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Teniendo en cuenta que

$$1 = \frac{n}{n} = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n},$$

la igualdad

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)\left(\frac{1}{a_1} \cdots + \frac{1}{a_n}\right) = \left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)(a_1^2 + \cdots + a_n^2)\left(\frac{1}{a_1} \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

es evidente. Si aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz con $x_j = 1/\sqrt{n}$ e $y_j = a_j$, obtenemos

$$\begin{aligned} (a_1^2 + \cdots + a_n^2)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) &\geq \left(\frac{a_1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)^2\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \\ &= \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)^2\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right), \end{aligned}$$

y aplicando otra vez la desigualdad de Cauchy-Schwarz, esta vez con $x_j = \sqrt{a_j}$ e $y_j = 1/\sqrt{a_j}$, llegamos a que

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)\left(\frac{1}{a_1} \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)(1 + \cdots + 1)^2 = n(a_1 + \cdots + a_n).$$

□

Ejemplo 3.2. *Para a y b números reales positivos, ¿cuál es el máximo valor de $a \sin\alpha + b\cos\alpha$ para $0 < \alpha < \pi/2$? ¿Para qué valores de a y b se alcanza dicho máximo?*

Teniendo en cuenta que

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = |a\sin\alpha + b\cos\alpha| = \sqrt{(a\sin\alpha + b\cos\alpha)^2}$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el radicando con $x_1 = a$, $x_2 = b$, $y_1 = \sin\alpha$ e $y_2 = \cos\alpha$ obtenemos

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha \leq \sqrt{(a^2+b^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \sqrt{a^2+b^2}$$

La igualdad se se cumple si $a = t\sin\alpha$ y $b = t\cos\alpha$. Despejando t tenemos

$$t = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\cos\alpha}{b},$$

lo que implica que el máximo se alcanza cuando a y b cumplen la relación $\tan\alpha = a/b$. □

Extra: desigualdad de reordenamiento

Sean las sucesiones $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ de números reales positivos, ordenadas de tal forma que o bien

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \quad \text{e} \quad y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n,$$

o bien

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \quad \text{e} \quad y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n.$$

Sea además $z_1, \ldots, z_n$ un reordenamiento de los números $y_1, \ldots, y_n$, entonces se cumple la **desigualdad de reordenamiento**

$$\boxed{x_1y_n + \cdots + x_ny_1 \leq x_1z_1 + \cdots + x_nz_n \leq x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.}$$

Ejemplo 3.3. *Sean a, b y c números reales positivos. Probar*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \leq b \leq c$, por lo que $a^2 \leq b^2 \leq c^2$. Por la desigualdad de reordenamiento, tomando $x_1 = a^2$, $x_2 = b^2$ y $x_3 = c^2$ e $y_1 = a$, $y_2 = b$ e $y_3 = c$ tenemos

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2z_1 + b^2z_2 + c^2z_3,$$

con z_1, z_2, z_3 cualquier reordenación de a, b, c. Eligiendo la reordenación $z_1 = b$, $z_2 = c$ y $z_3 = a$ obtenemos la desigualdad deseada. □