POLINOMIOS Y FUNCIONES

GLENIER BELLO

1. Funciones

Los problemas de olimpiadas matemáticas que hacen referencia a *funciones*, suelen ser *ecuaciones funcionales*. Es decir, son problemas del tipo: "Encuentra todas las funciones de un conjunto X (típicamente los reales $\mathbb{R}$, los racionales $\mathbb{Q}$, los enteros $\mathbb{Z}$ o los naturales $\mathbb{N}$), en un conjunto Y (típicamente el propio X), tales que f cumpla cierta igualdad". A veces, en vez de una igualdad, se presentan problemas donde la función cumple una desigualdad. Esa igualdad (o desigualdad) funcional suele involucrar una, dos o incluso tres variables.

Las ideas típicas para resolver este tipo de problemas son las siguientes.

Idea 1. Dar valores a las variables y deducir algunos valores particulares de la función. Por ejemplo, la evaluación en 0 suele ser muy útil (a veces obtenemos directamente cuánto vale $f(0)$).

Idea 2. Probar otro tipo de sustituciones. Por ejemplo, cuando nuestra ecuación funcional involucra dos variables, digamos x e y, suele ser buena idea probar con sustituciones del tipo $y = -x$ (que, por ejemplo, muchas veces ayuda a deducir la *paridad* de la función).

Idea 3. Cada vez que obtengamos información nueva, es recomendable dejarla bien remarcada y ponerle quizá algún nombre, por ejemplo, ecuación (1). De esta forma nos resultará más fácil referenciarla cuando la usemos.

Supongamos que tenemos varias conclusiones, digamos (1), (2) y (3), y acabamos de obtener una nueva conclusión (4). Es muy importante que nos hagamos las preguntas: ¿podemos usar (4) para obtener más información en (1), (2) y (3)?

Idea 4. Uso de herramientas de otras áreas. A veces hace falta usar inducción, ideas de desigualdades (cuando tengamos una desigualdad funcional en el enunciado), etc. Por ejemplo, cuando tengamos ecuaciones funcionales de funciones definidas sobre los enteros, hay que tener en cuenta que casi seguro habrá que usar herramientas de teoría de números. Por ejemplo, divisibilidad. A veces simplemente hace falta usar el *carácter discreto* del problema.

Idea 5. Tratar de obtener soluciones *a ojo*. Por ejemplo, suele ser útil testear si la función $f(x) = x$ es solución del problema o, más en general, probar con las soluciones lineales $f(x) = ax + b$. Dando soluciones particulares (que quizá sean todas) del problema ya se suele obtener algún punto en el problema, suponiendo que no se consiga avanzar mucho más. Sin embargo, esto tiene un pequeño inconveniente. A veces intentamos probar que la (las) solución (soluciones) que hemos encontrado son *todas*, e intentamos probar propiedades de la función que en general no se cumplen. Por ejemplo, puede suceder que veamos que $f(x) = cx$ sea solución del problema para cualquier c (por ejemplo, real), e intentemos probar que f es impar, y empleemos bastante tiempo en ello. Pero, sin embargo, resulte que hay una solución especial aparte que resulte que no sea impar, con lo cual nuestros esfuerzos eran en vano.

Por tanto, las soluciones particulares nos ayudan a *conjeturar* propiedades que tendrá la función, pero debemos tener en cuenta que quizá algunas de las conjeturas que hagamos sean falsas.

Pero, como siempre, la mejor manera de aprender a resolver problemas es haciendo muchos problemas. De esta forma podremos interiorizar las ideas antes mencionadas y muchas más.

A continuación, veamos varios problemas representativos. Hay que tener en cuenta que las soluciones han sido escritas de forma un poco escueta a veces, yendo al grano, y quizá no reflejen del todo bien cómo se nos podrían haber ocurrido. Sin embargo, al final de cada solución haremos un pequeño resumen de las ideas empleadas.

El primer problemas es la célebre *ecuación funcional de Cauchy*. En este caso, la planteamos sobre los racionales $\mathbb{Q}$.

Problema 1.1. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que la *ecuación de Cauchy*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

se cumple para todos $x, y \in \mathbb{Q}$.

Solución. Sea f una función cumpliendo (1). Veamos que se cumple

$$f(mx) = mf(x) \tag{2}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in \mathbb{Q}$. En efecto, para $m = 1$ la afirmación es obvia. Supongamos ahora que (2) para algún m. Entonces

$$f((m+1)x) = f(x+mx) = f(x) + f(mx) = f(x) + mf(x) = (m+1)f(x).$$

Por tanto, por inducción tenemos que (2) se cumple para todo $m \geq 1$. Notar que haciendo $x = y = 0$ en (1) tenemos que $f(0) = 0$. Luego (2) también se cumple para $m = 0$. Por otro lado, haciendo $y = -x$ en (1) se obtiene que $f(-x) = -f(x)$ (es decir, f es una función impar). Por tanto, (2) también se cumple para m negativo, como queríamos demostrar.

Haciendo $x = 1/m$ en (2), deducimos que

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{f(1)}{m} \tag{3}$$

para todo entero no nulo m. Luego, para cualquier $x \in \mathbb{Q}$, digamos $x = m/n$, tenemos

$$f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = f(1)\frac{m}{n} = f(1)x.$$

Es inmediato comprobar que las funciones de la forma $f(x) = cx$, donde $c \in \mathbb{Q}$, satisfacen (1). Por tanto, esas son todas las soluciones. □

Las ideas claves para resolver este problema han sido:

- Testeando las ecuaciones lineales que cumplen (1) obtenemos las soluciones $f(x) = cx$, para cualquier c racional. En particular, no podemos esperar obtener ningún valor concreto para $f(1)$. El único valor que podemos conjeturar es $f(0) = 0$, lo cual es cierto haciendo $x = y = 0$ en (1) .
- Haciendo sucesivamente $y = x, y = 2x, y = 3x...$ en (1), conjeturamos (2).
- Probamos (2) usando inducción.
- Hacer $x = 1/m$ en (2) para obtener (3).
- Juntando (2) y (3) obtenemos que, en efecto, todas las soluciones son las que habíamos conjeturado al principio.

Problema 1.2. Hallar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que

$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)} \tag{4}$$

para todo $x > 0$.

Solución. Notar que (4) se puede escribir de la forma

$$f(x)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) f(x) + 1 = 0. \tag{5}$$

Esa ecuación de grado 2 en $f(x)$ tiene soluciones $f(x) = x$ y $f(x) = 1/x$. Por tanto, para cada $x > 0$ se cumple que $f(x) = x$ o bien $f(x) = 1/x$. Como f tiene que ser continua sólo hay 4 posibilidades:

1) $f(x) = x \quad (\forall x > 0)$, 2) $f(x) = 1/x \quad (\forall x > 0)$,

3) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1/x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, 4) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Es inmediato comprobar que esas 4 funciones son solución de (4). □

Las ideas claves para resolver este problema han sido:

- Es obvio que $f(x) = x$ es solución del problema. Mirando (4) con un poco de cuidado, también puede resultar natural ver la solución $f(x) = 1/x$.
- Darse cuenta que era posible llegar a la ecuación (5) de grado 2 en $f(x)$, cuya resolución es bien conocida.
- Tener en cuenta que como queremos obtener funciones continuas, sólo pueden darse 4 posibilidades. ¡Atención!: no sólo se dan las dos soluciones que vimos a ojo al principio.

El siguiente problema pone de manifiesto la necesidad de comprobar todas las soluciones que obtengamos mediante razonamientos lógicos. A fin de cuentas, nuestros razonamientos siempre empiezan (implícitamente) de la forma: *supongamos que f es una función que satisface la ecuación del enunciado.* Luego, mediante razonamientos lógicos obtenemos cómo debería ser f. Pero, ¡bien podría suceder que de hecho no existiera ninguna solución al problema planteado!

Problema 1.3. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) + f(x + y) = y + 2, \tag{6}$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución. Poniendo $y = 0$ en (6) obtenemos que $f(x) = 1$ para todo x real. Sin embargo, es inmediato comprobar que esa función no cumple (6). Por tanto, no hay ninguna función que cumpla el enunciado. □

El siguiente problema trata de funciones definidas sobre los números naturales. Luego, como es de esperar, en la solución se usará ese *carácter discreto* del problema.

Problema 1.4. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $f(f(n)) = n+2$ para todo número natural n.

Solución. Sea f una función sobre los naturales tal que $f(f(n)) = n+2$ para todo n. Notar que entonces la imagen de f contiene al conjunto $\{3, 4, 5 \ldots\}$. Además, es inmediato que f es inyectiva. Por otro lado, f no tiene puntos fijos. Consideremos los siguientes casos.

Caso 1: $f(1) = 1$. Esto obviamente contradice el hecho de que f no tiene puntos fijos.

Caso 2: $f(1) = 2$. Entonces $f(2) = f(f(1)) = 1 + 2 = 3$. Análogamente vemos que $f(3) = 4, f(4) = 5$... En general, $f(n) = n + 1$. Es inmediato comprobar que, en efecto, ésta es una solución.

Caso 3: $f(1) = 3$. Entonces $f(3) = f(f(1)) = 1 + 2 = 3$, lo cual contradice el hecho de que f no tiene puntos fijos.

Caso 4: $f(1) = 4$. Notar que $f(f(2)) = 4$, luego, como f es inyectiva, tiene que ser $f(2) = 1$. Además,

$$f(4) = f(f(1)) = 3, \quad f(3) = f(f(4)) = 6, \quad f(6) = f(f(3)) = 5, \quad f(5) = f(f(6)) = 8.$$

Esto nos hace conjeturar que en este caso llegamos a

$$f(n) = \begin{cases} n+3 & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ n-1 & \text{si} \quad n \text{ es par.} \end{cases}$$

Es inmediato comprobar por inducción que en efecto f será así. Por otro lado, también es fácil ver que esa función cumple el enunciado.

Finalmente, consideremos el último caso.

Caso 5: $f(1) \geq 5$. Sea $m := f(1) - 2 \geq 3$. Como 3 pertenece a la imagen de f, tenemos que $m = f(k)$ para algún natural k. Usando que $f(f(m)) = m+2 = f(1)$ y la inyectividad de f, deducimos que $f(m) = 1$. Es decir, $f(f(k)) = 1$. Pero, por otro lado, $f(f(k)) = k+2$, lo cual implica que $k = -1$ y llegamos a una contradicción.

Por tanto, hay dos soluciones al problema:

$$1)\ f(n) = n+1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \qquad 2)\ f(n) = \begin{cases} n+3 & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ n-1 & \text{si} \quad n \text{ es par.} \end{cases} \qquad \square$$

Las ideas claves para resolver este problema han sido:

- Algunas observaciones se podían sacar inmediatamente sobre f: la inyectividad, que no existen puntos fijos y que el rango de f contiene a los naturales a partir del 3.
- A ojo se veía la solución $f(n) = n+1$. Esta solución nos ha llevado a intentar probar que $f(1)$ tenía que ser igual a 2. Para ello hemos ido probando con $f(1) = 1, f(1) = 3$ y hemos visto que, en efecto, se llegaba a una contradicción. Sin embargo, para $f(1) = 4$, sorprendentemente, ¡había una solución!
- La idea clave (que se podía intentar deducir estudiando los casos $f(1) = 5, 6, 7...$) ha sido el hecho de que si $f(1) \geq 5$, entonces $f(1) - 2$ pertenece al rango de f, y usar eso para llegar a una contradicción.

2. Polinomios

Definición 2.1. Un *polinomio* es una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo y los coeficientes a_j son números complejos, con $a_n \neq 0$. Diremos que n es el *grado* de f y lo denotaremos por $\operatorname{grado} f$.

Ejercicio 2.2. Probar que no existe ninguna función como en la definición anterior que se anule para todo $x \in \mathbb{C}$.

Definición 2.3. A la función idénticamente nula la llamaremos *polinomio nulo*. A este polinomio especial no le asociaremos ningún grado.

Teorema 2.4 (Algoritmo de la división con resto)**.** *Dados dos polinomios f y g, existe un único par de polinomios q y r tales*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

donde $\operatorname{grado} r < \operatorname{grado} g$ *o bien* $r = 0$.

Observación 2.5. Si f y g son polinomios con coeficientes reales, entonces los polinomios q y r dados por el Teorema 2.4 también tienen coeficientes reales. Un enunciado análogo se tiene para polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Observar que esto no es cierto para polinomios con coeficientes enteros. (La clave está en que $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son *cuerpos*, pero los enteros $\mathbb{Z}$ no.)

Definición 2.6. Los polinomios q y r se llaman *cociente* y *resto* de la división de f entre g, respectivamente. Diremos que g divide a f cuando $r = 0$.

Definición 2.7. Diremos que $a \in \mathbb{C}$ es una *raíz* del polinomio f cuando $f(a) = 0$.

Teorema 2.8. *Sea f un polinomio. Entonces $a \in \mathbb{C}$ es una raíz de f si y sólo si existe un polinomio q tal que $f(x) = (x - a)q(x)$.*

Definición 2.9. Sea f un polinomio y $a \in \mathbb{C}$ una raíz de f. Diremos que a es una *raíz de multiplicidad* $m \in \mathbb{N}$ si $f(x) = (x - a)^m q(x)$ para cierto polinomio q tal que $q(a) \neq 0$.

Teorema 2.10 (Teorema fundamental del álgebra)**.** *Todo polinomio no constante tiene una raíz compleja.*

Corolario 2.11. *Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces complejas (contando las multiplicidades).*

Corolario 2.12. *Sea f un polinomio de grado n, y sean $a_1, \ldots, a_k$ sus raíces (distintas) con multiplicidades $m_1, \ldots, m_k$. Entonces $m_1 + \ldots + m_k = n$ y además*

$$f(x) = c(x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}$$

para alguna constante no nula c.

Teorema 2.13 (Fórmulas de Vieta)**.** *Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $c_1, \ldots, c_n$ números complejos tales que*

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n.$$

Entonces, para $k = 1, \ldots, n$,

$$c_k = (-1)^k \sum \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}$$

donde la suma es sobre subconjuntos de k elementos $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ejemplo 2.14. Si a, b y c son las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$, entonces

$$p_2 = -(a + b + c), \quad p_1 = ab + bc + ca, \quad p_0 = -abc.$$

Problema 2.15. Sean a, b y c números reales no nulos y distintos. Probar que si las ecuaciones $x^2 + ax + bc = 0$ y $x^2 + bx + ca = 0$ tienen una raíz en común, entonces las restantes raíces verifican la ecuación $x^2 + cx + ab = 0$.

Solución. Sean r y s las raíces de la ecuación $x^2 + ax + bc = 0$, y sean r y t las raíces de la ecuación $x^2 + bx + ca = 0$ (recordar que amabas ecuaciones tienen una raíz en común, que hemos denotado por r). Entonces r también será raíz de la diferencia de ambas ecuaciones: $(a - b)x + bc - ca = 0$. De aquí obtenemos que $r = c$ (usando que $a \neq b$).

Usando las relaciones de Vieta en la ecuación $x^2 + ax + bc = 0$, cuyas raíces son c y s obtenemos que

$$c + s = -a, \qquad cs = bc.$$

La segunda ecuación de arriba nos dice que $s = b$ (usando que $c \neq 0$), y de la primera deducimos que los datos a, b, c del enunciado deben cumplir $c + b = -a$.

Por otro lado, usando las relaciones de Vieta en la ecuación $x^2 + bx + ca = 0$, cuyas raíces son c y t obtenemos que

$$c + t = -b, \qquad ct = ca.$$

La segunda ecuación de arriba nos dice que $t = a$ (usando que $c \neq 0$), y de la primera deducimos de nuevo que $c + a = -b$.

Como $s + t = a + b = -c$, y $st = ab$, por la relaciones de Vieta deducimos que s y t son raíces de la ecuación $x^2 + cx + ab = 0$, como queríamos demostrar. $\square$

Las ideas claves para resolver este problema han sido:

- Recordar que si r es una raíz de dos ecuaciones, también lo es de la diferencia (y la suma) de ambas. Con esto hemos podido hallar el valor de r.
- Uso de las fórmulas de Vieta.

Problema 2.16. Sean a y b las raíces del polinomio $P(x) = 3x^2 + 3\lambda x + \lambda^2 - 1$, siendo λ un número real. Probar que $P(a^3) = P(b^3)$.

Solución. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$a + b = -\lambda, \qquad ab = (\lambda^2 - 1)/3.$$

Para probar que $P(a^3) = P(b^3)$, es inmediato que (después de simplificar) esto equivale a probar que $a^6 + \lambda a^3 = b^6 + \lambda b^3$. En otras palabras, queremos probar que

$$0 = a^6 - b^6 + \lambda(a^3 - b^3) = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3 + \lambda).$$

Pero esto es inmediato ya que

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = -\lambda^3 + (\lambda^2 - 1)\lambda = -\lambda. \qquad \square$$

Las ideas claves para resolver este problema han sido:

- Usar las fórmulas de Vieta.
- Uso de la identidad algebraica $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$.