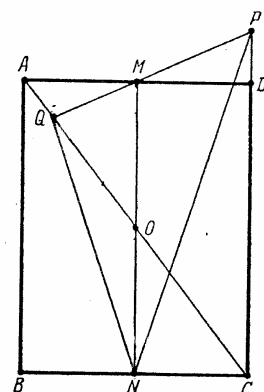


Soluciones de los problemas propuestos en la sesión expositiva

Problema 1. Sean M y N los puntos medios de los lados AD y BC de un rectángulo $ABCD$. Tomamos un punto P en la prolongación de DC por encima de D . Sea Q el punto de intersección de PM y AC . Demostrar que $\widehat{QNM} = \widehat{MNP}$.



Solución:

Por el centro O del rectángulo trazamos una paralela a BC que corta a QN en el punto K .

Como $MO \parallel PC$, se tiene que $\frac{QM}{MP} = \frac{QO}{OC}$

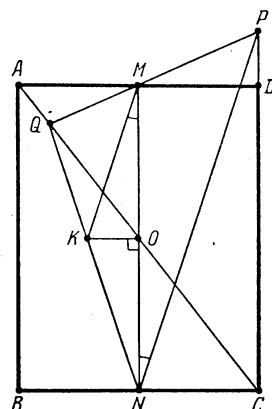
Por ser $KO \parallel NC$, se tiene que $\frac{QO}{OC} = \frac{QK}{KN}$

Iguando ambas proporciones, obtenemos la proporción: $\frac{QM}{MP} = \frac{QK}{KN}$ que implica que los segmentos KM y NP son paralelos.

Por tanto: $\widehat{MNP} = \widehat{KMO}$ (alternos internos)

Como los triángulos KON y KOM son congruentes (simétricos): $\widehat{KMO} = \widehat{KNO}$

y ya tenemos lo que queríamos probar: $\widehat{KNM} = \widehat{QNM} = \widehat{MNP}$



Problema 2. Sean O y H respectivamente el circuncentro y el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC . Demostrar que $\angle BAH = \angle CAO$.

Solución

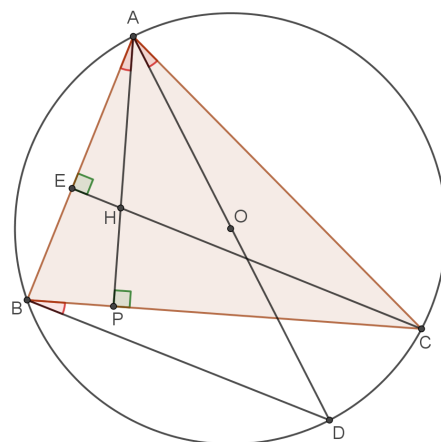
Prolongamos AH hasta que corte a BC en el punto P y AO hasta volver a encontrar la circunferencia circunscrita en D .

El triángulo ABD es rectángulo en B , pues es inscrito que abarca media circunferencia.

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp BD \\ AP \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{CBD}$$

Por ser inscritos con el mismo arco $\widehat{CD}$: $\widehat{DAC} = \widehat{CBD}$

Por tanto, $\widehat{BAH} = \widehat{BAP} = \widehat{CAD} = \widehat{CAO}$ c.q.d.



Problema 3. Demostrar que si en una circunferencia se inscribe un polígono convexo de un número impar de lados que tenga todos sus ángulos iguales, entonces ha de ser necesariamente regular (es decir, sus lados han de ser también iguales). ¿Qué sucede si el número de lados es par?

Solución

En el triángulo es claro (un triángulo equiángulo es necesariamente equilátero).

Supongamos un polígono equiángulo de más de tres lados inscrito en una circunferencia.

Tomemos los cuatro primeros vértices A_0, A_1, A_2, A_3

Los triángulos $A_0A_1A_2$ y $A_3A_1A_2$ serán congruentes, ya que:

$\widehat{A_1A_0A_2} = \widehat{A_1A_3A_2}$ por ser inscritos con el mismo arco $\widehat{A_1A_2}$

$\widehat{A_0A_1A_2} = \widehat{A_3A_1A_2}$ por ser una inscripción equiángula.

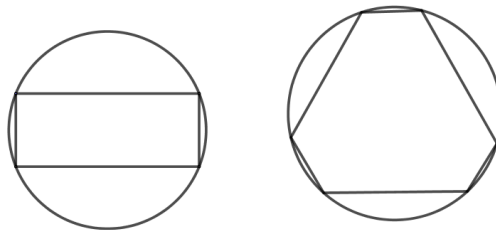
El lado A_1A_2 es común.

Por tanto $A_0A_1 = A_2A_3 \Rightarrow \ell_1 = \ell_3$ (siendo $\ell_i = A_{i-1}A_i$ el lado i -ésimo desde el inicio de nuestro recuento).

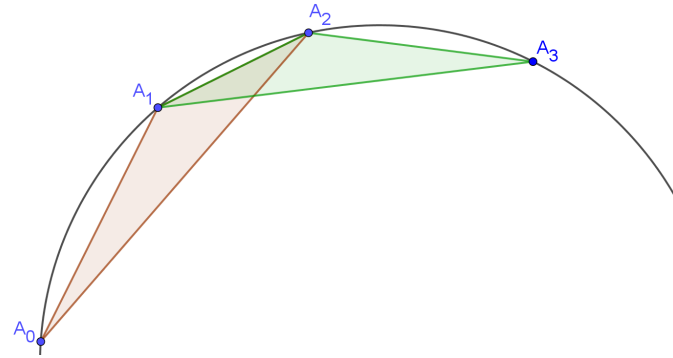
Extendiendo el mismo razonamiento a cuatro vértices consecutivos, tendremos garantizadas las igualdades:

$$\ell_1 = \ell_3 = \ell_5 = \dots \quad \text{y por otra parte} \quad \ell_2 = \ell_4 = \ell_6 = \dots$$

- Si el número de lados es par, las dos series de igualdades serán independientes, y los lados no necesariamente serán iguales, pudiendo haber dos tipos de lado. Ejemplos:



- Si el número de lados es impar los ciclos no se cierran y tendremos que $\ell_n = \ell_2$, completándose así la igualdad de todos los lados. El polígono será equilátero c.q.d.



Problema 4. Un trapecio de bases a y b está inscrito en una circunferencia y circunscrito a otra. Hallar su área.

Solución

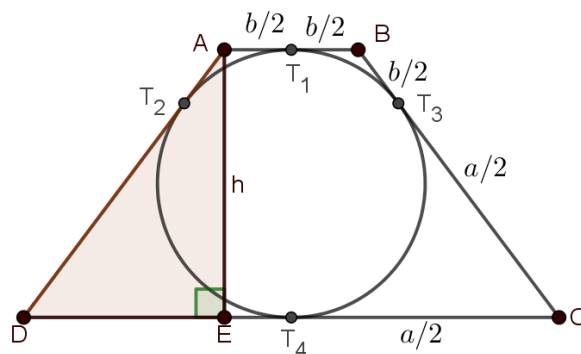
Por estar inscrito en una circunferencia debe ser isósceles, pues sus ángulos opuestos han de ser suplementarios.

Consideremos los puntos de tangencia de los lados del trapecio con la circunferencia inscrita, la igualdad de segmentos tangentes y la simetría de la

figura: el lado oblicuo debe ser $x = \frac{a+b}{2}$

(es el teorema de Pitot: $2x = a + b$).

Sea E la proyección ortogonal de A sobre DC y sea $h=AE$ la altura del trapecio.



En AED aplicamos el teorema de Pitágoras para obtener h

$$h = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$$

Por consiguiente, el área del trapecio es $S = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$

Nota: podíamos habernos ahorrado el cálculo de la altura, ya que, al ser un trapecio isósceles es un cuadrilátero cíclico y es válida la **fórmula de Brahmagupta** para el cálculo de su área : si a, b, c y d son los lados de un cuadrilátero cíclico, su área es:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad \text{siendo } p = \frac{a+b+c+d}{2} \quad (\text{semiperímetro})$$

Pero como además es un cuadrilátero circunscrito a otra circunferencia, se cumple el teorema de Pitot y, por tanto $a+c=b+d=p$, con lo que la expresión del área para estos cuadriláteros “bicéntricos” queda $S = \sqrt{abcd}$. En nuestro caso:

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} ab = \frac{a+b}{2} \sqrt{ab} \quad \text{como ya sabemos.}$$

Problema 5. Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico y sus diagonales se cortan perpendicularmente en el punto P . Trazamos las sucesivas tangentes en A, B, C y D a la circunferencia inscrita en el cuadrilátero. Estas tangentes se van cortando cada una de ellas con la siguiente en los puntos K, L, M y N . Demostrar que $KLMN$ es un cuadrilátero cíclico y, por tanto, bicéntrico.

Solución

Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $ABCD$.

Sean $\widehat{AOB} = \alpha$ y $\widehat{COD} = \beta$

Por ser recto el ángulo interior APB , tenemos

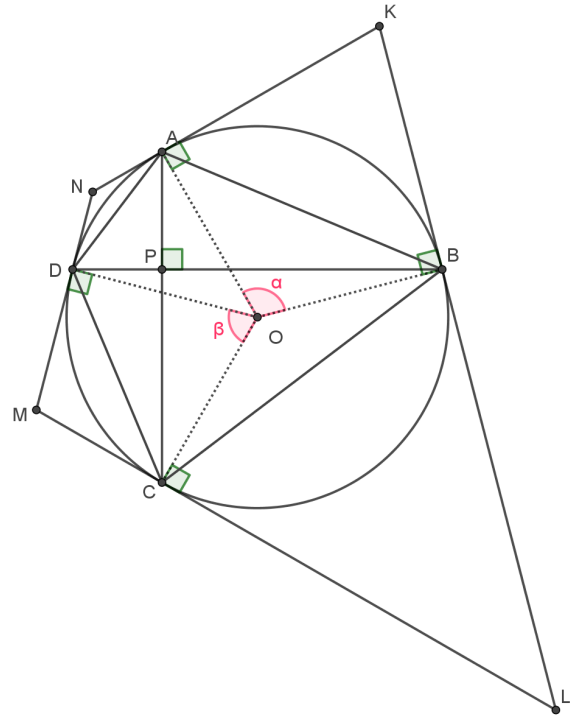
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$$

En el cuadrilátero $KAOB$, $\widehat{AKB} = 180^\circ - \alpha$

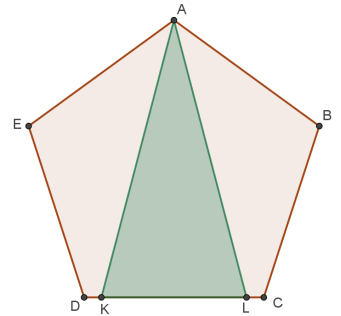
En el cuadrilátero $MCOD$, $\widehat{DMC} = 180^\circ - \beta$

$$\widehat{AKB} + \widehat{DMC} = 360^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ$$

Por tanto, $KLMN$ es cíclico por tener dos ángulos opuestos que son suplementarios.



Problema 6. El pentágono regular $ABCDE$ cuyo lado mide 1 está dividido en tres polígonos de igual área por los segmentos AK y AL . Hallar la medida del segmento KL .



Solución

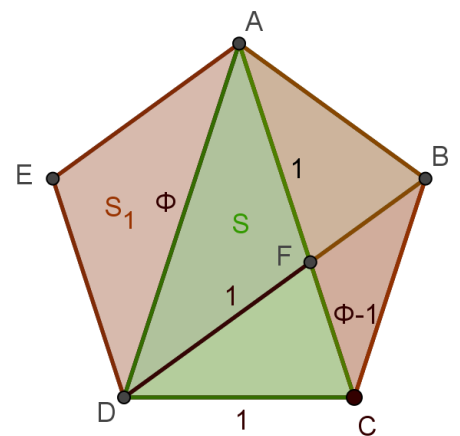
Sabemos que si el lado del pentágono es 1, la diagonal es el número áureo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ver “Recursos elementales...”).

Denotamos por S el área de ADC y por S_1 el área de cualquiera de los triángulos iguales ADE , ABC o ADF .

Los triángulos AFD y ACD comparten altura desde D , por lo que sus áreas son directamente proporcionales a sus bases AF y AC :

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \Rightarrow S_1 = (\Phi - 1)S$$

Ahora vamos a nuestro problema.



Sea h la altura del triángulo ADC tomando DC como base.

La igualdad de áreas de los cuadriláteros $AEDK$ y $ABCL$ exige simetría. Por tanto, podemos asegurar que $DK=CL=m$.

Las áreas de los triángulos ADK y ACL son $[ADK] = [ACL] = \frac{mh}{2}$

Buscamos m tal que

$$S - mh = S_1 + \frac{mh}{2} \Rightarrow \frac{h}{2} - mh = \frac{h}{2}(\Phi - 1) + \frac{mh}{2}$$

Cancelando h , multiplicando por 2 y reagrupando:

$$3m = 2 - \Phi \Rightarrow m = \frac{2 - \Phi}{3}$$

En consecuencia $KL = 1 - 2m = 1 - \frac{4 - 2\Phi}{3} = \frac{2\Phi - 1}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

