Seminario de Problemas. Logroño, 18 de diciembre de 2012

Problema 1

Si a, b, c, d son números reales que verifican

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{4-\sqrt{5-a}}; \quad b = \sqrt{4+\sqrt{5-b}}; \\ c &= \sqrt{4-\sqrt{5+c}}; \quad d = \sqrt{4+\sqrt{5+d}}; \end{aligned}$$

calcular el valor de $abcd$.

Origen del problema: Olimpiada de Bielorrusia 1993

Solución

Es fácil ver que los números a, b, c, d son distintos y positivos.

Por una parte, a y b satisfacen la ecuación

$$x^4 - 8x^2 + x + 11 = 0,$$

mientras que c y d son soluciones de la ecuación

$$y^4 - 8y^2 - y + 11 = 0.$$

Ambas ecuaciones se deducen una de otra por medio de la transformación $x = -y$. Por lo tanto, $a, b, -c, -d$ son soluciones de la ecuación $x^4 - 8x^2 + x + 11 = 0$, y entonces $ab(-c)(-d) = abcd = 11$.

Problema 2

Racionalizar el denominador de

$$\frac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}.$$

Origen del problema: la revista rumana Gazeta Matematica, 1963.

Solución

Si llamamos $a = \sqrt[3]{2}$,la fracción se escribe en la forma

$$\frac{1}{2a^2 + 3a + 1} = \frac{1}{(a+1)(2a+1)}.$$

Para racionalizar, necesitamos obtener a^3 (que es 2). Para eso apelamos a una identidad notable que es útil recordar:

$$x^3 - y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right),$$

y en nuestro caso, multiplicando numerador y denominador por $\left(a^2 - a + 1\right)\left(4a^2 - 2a + 1\right)$ resulta

$$\begin{aligned} & \frac{\left(a^2 - a + 1\right)\left(4a^2 - 2a + 1\right)}{(a^3+1)(8a^3+1)} \\ = \quad & \frac{\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1\right)\left(4\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 1\right)}{(2+1)(16+1)} = \frac{5\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{4} - 11}{51}. \end{aligned}$$

Problema 3

En el triángulo ABC, sea M un punto del lado BC tal que $\frac{BM}{MC} = k$. Demostrar que

$$AM^2 = \frac{AB^2 + k\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) + k^2 AC^2}{(k+1)^2}.$$

Origen del problema: Revista rumana Gazeta Matematica, 2/1997

Solución

Llamemos $\alpha = \widehat{BMA}$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{BM}{MC} &= k \Longrightarrow \frac{BM + MC}{MC} = \frac{a}{MC} = \frac{k+1}{1}; \\ MC &= \frac{a}{k+1}, BM = \frac{ak}{k+1} \end{aligned}$$

y el teorema de Stewart debería hacer el resto:

$$\begin{aligned} c^2 &= AM^2 * BM^2 - 2 \cdot AM \cdot BM \cdot \cos\alpha \\ b^2 &= AM^2 + CM^2 + 2 \cdot AM \cdot CM \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

y eliminaremos los términos que contienen $\cos\alpha$ multiplicando la primera de estas dos últimas igualdades por CM, la segunda por BM y sumando miembro a miembro. De le expresión resultante se obtiene el resultado pedido.

Problema 4

En el plano están situadas cuatro circunferencias C_1, C_2, C_3 y C_4 de la siguiente manera:

C_1 es tangente exteriormente a C_2 y a C_4; C_2 es tangente exteriormente a C_3; C_3 es tangente exteriormente a C_4. Además, C_1 y C_2; C_2 y C_3; C_3 y C_4; C_4 y C_1 tienen tangentes exteriores comunes, que forman un cuadrilátero que tiene un círculo inscrito.

Demostrar que dos de los radios de las cuatro circunferencias $C_i, i = 1, 2, 3, 4$ son iguales.

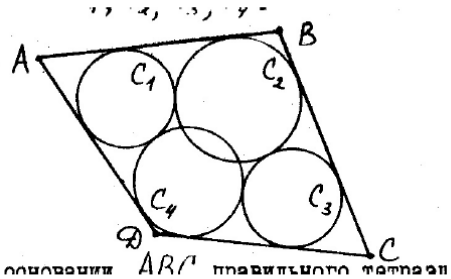
Origen del problema: Olimpiada de la URSS 1990, Fase de Repúblicas; autor: Igor Voronovich.

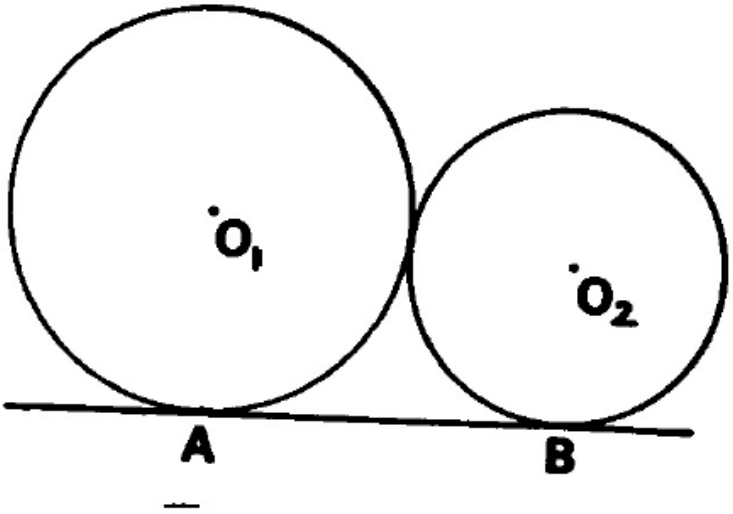
En la situación de la figura, la distancia entre los puntos de tangencia de las circunferencias con la recta es $2\sqrt{r_1 r_2}$, que se demuestra aplicando el teorema de Pitágoras.

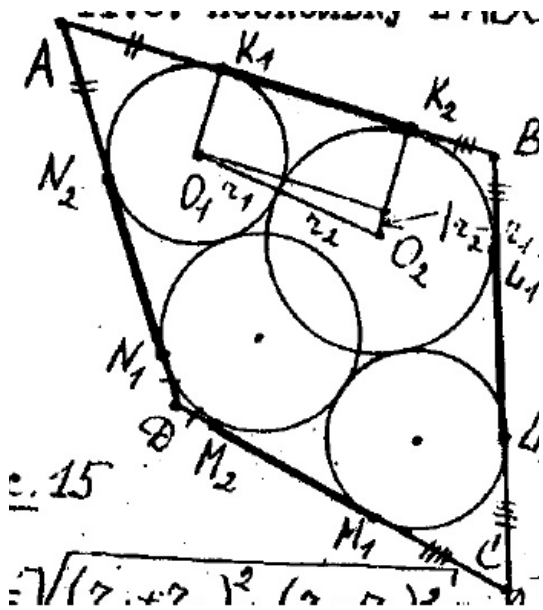
Por otra parte, el que en la primera figura el cuadrilátero $ABCD$ tenga un círculo inscrito es equivalente (teorema de Pithot) a que se cumpla la igualdad $AB + CD = BC + DA$.

Entonces, considerando esta nueva figura, teniendo en cuenta la igualdad de segmentos de tangente a una circunferencia trazadas desde un punto exterior, obtenemos que

En el plano están situados cuatro círculos, de la siguiente manera: C_1 es tangente exteriormente a C_2 y a C_4; C_2 es tangente exteriormente a C_3 ; C_3 es tangente exteriormente a C_4. Los círculos C_1 y C_2 ; C_2 y C_3; C_3 y C_4; C_4 y C_1 tienen tangentes exteriores comunes, las cuales forman un cuadrilátero con un círculo inscrito. Demostrar que dos de los círculos tienen el mismo radio.







$$K_1K_2 + M_1M_2 = L_1L_2 + N_1N_2,$$

y esto se traduce en

$$2\left(\sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_3r_4} - \sqrt{r_2r_3} - \sqrt{r_4r_1}\right) = 0$$

que es equivalente a

$$\left(\sqrt{r_1} - \sqrt{r^3}\right)\left(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_4}\right) = 0,$$

y hemos terminado.

Problema 5

Durante un año no bisiesto, un almacén que abre todos los días de la semana (7) vende, al menos, un libro al día, y un total de 600 libros en todo el año. ¿Habrá habido algún período de días consecutivos en el que se hayan vendido exactamente 129 libros?

Origen del problema: The Green Book, Integer Press, Canada 1985, por H. Hardy y K. Williams.

Solución

Llamemos $a_i, i = 1, 2, ..., 365$ el número de libros vendidos durante el período comprendido entre el primer día y el i-ésimo, ambos inclusive. Entonces tenemos

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{365} = 600$$

La idea clave es sumar a todos los miembros de estas desigualdades el número 129. Entonces obtenemos

$$130 \leq a_1 + 129 < a_2 + 129 < \cdots < a_{365} + 129 = 729.$$

Entonces, reuniendo estas dos cadenas de desigualdades, obtenemos

$$a_1, a_2, \cdots, a_{365}, a_1 + 129, \cdots, a_{365} + 129,$$

que son 730 enteros positivos, comprendidos entre 1 y 729. Por el principio del palomar, dos de ellos tienen que ser iguales, y necesariamente tienen que serlo uno de la primera cadena y uno de la segunda (porque las desigualdades son estrictas):

$$a_k = a_j + 129, \text{ con } 1 \leq j < k \leq 365.$$

Por lo tanto, $a_k - a_j = 129$, y eso significa que se vendieron 129 libros entre el día $(j+1)$ −ésimo y el $k-$ ésimo.

Problema 6

Las cuatro raíces reales, r_1, r_2, r_3, r_4 de la ecuación

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 30 = 0,$$

cumplen la condición

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{5} + \frac{r_3}{6} + \frac{r_4}{8} = 2.$$

Resolver la ecuación y hallar el valor de b.

Origen del problema: Banco de la I Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, compilado por Samuel Greitzer.

Solución

Si la suma de las cuatro fracciones del enunciado vale 2, su media aritmética es $\frac{1}{2}$.

Pero si hallamos

$$\sqrt[4]{\frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{480}} = \sqrt[4]{\frac{30}{480}} = \frac{1}{2},$$

es decir su media geométrica concide con la aritmética. Esto, necesariamente, hace que

$$\frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_3}{6} = \frac{r_4}{8} = \frac{1}{2},$$

y de aquí se calculan fácilmente las cuatro raíces y a continuación de calcula b.