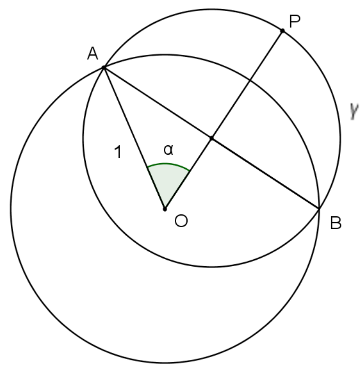
37. Dada una cuerda AB de una circunferencia de radio 1 y centro O, se considera la circunferencia γ de diámetro AB. Sea P es el punto de γ más alejado del punto O. ¿Cuál es el máximo valor que puede tener la distancia OP?

Solución. El punto P de γ más alejado de O es claramente el punto más exterior de corte de la mediatriz de AB (que pasa por O) con γ. Llamando $\alpha = \angle POA$, $\alpha \in (0, \pi/2)$, se tiene que $OP = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$.



Ahora bien,

$$OP = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\alpha + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\alpha + \tfrac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2},$$

luego el máximo valor de OP es $\sqrt{2}$, que se alcanza cuando $\alpha = \pi/4$, es decir, cuando γ pasa por O.

38. Sean x, y, z números positivos. Demuestra las desigualdades

(a) $\dfrac{x^2}{x+y} \geq \dfrac{3x-y}{4}$

(b) $\dfrac{x^3}{x+y} + \dfrac{y^3}{y+z} + \dfrac{z^3}{z+x} \geq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$

Solución.

(a) Como x e y son positivos, se tiene que

$$\frac{x^2}{x+y} \geq \frac{3x-y}{4} \iff 4x^2 \geq (x+y)(3x-y) \iff x^2+y^2 \geq 2xy \iff (x-y)^2 \geq 0.$$

(b) Aplicando (a), se tiene que

$$\frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{y+z} + \frac{z^3}{z+x} \geq \frac{3x^2-xy}{4} + \frac{3y^2-yz}{4} + \frac{3z^2-zx}{4}.$$

Por tanto, para probar (b) basta demostrar que

$$\frac{3(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)}{4} \geq \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{4} \iff x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz,$$

lo cual se sigue inmediatamente sumando las desigualdades evidentes $x^2+y^2 \geq 2xy$, $y^2+z^2 \geq 2yz$ y $z^2+x^2 \geq 2zx$.

39. Determina todos los números enteros $n \geq 1$ para los cuales el número $2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n$ es un cuadrado perfecto.

Solución 1.

Supongamos que $2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n = m^2$, con $m \in \mathbb{N}$. Por ser suma de un par y dos impares, m^2 es par y cuadrado perfecto, luego es múltiplo de 4. Por ser suma de tres múltiplos de 3, es múltiplo de 3 y cuadrado perfecto, luego es múltiplo de 9, lo que significa que $n > 1$.

Por otro lado, $2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n = 3^{14}(2^4 \cdot 3^2 + 5^2) + 3^n = 3^{14} \cdot 169 + 3^n = 3^{14} \cdot 13^2 + 3^n$.

Si tomamos congruencias de módulo 4:

$$\begin{cases} 3^1 & \equiv \quad 3 \mod 4 \\ 3^2 & \equiv \quad 1 \mod 4 \end{cases}$$

Como $169 \cdot 3^{14} \equiv 1 \mod 4$, n deberá ser impar, pues $m^2 \equiv 0 \mod 4$.

Si tomamos congruencias de módulo 10:

$$\begin{cases} 3^1 & \equiv \quad 3 \mod 10 \\ 3^2 & \equiv \quad -1 \mod 10 \\ 3^3 & \equiv \quad -3 \mod 10 \\ 3^4 & \equiv \quad 1 \mod 10 \end{cases}$$

Como $169 \cdot 3^{14} \equiv 1 \mod 10$, n debe ser de la forma $n = 4k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$. La otra posibilidad de n impar se descarta porque entonces sería $m^2 \equiv -2 \mod 10$, que no puede ser porque ningún cuadrado perfecto termina en 8.

Los posibles valores de n serían: $5, 9, 13, 17, 21, \ldots$. Distinguiremos dos casos:

Si $n < 14$ (es decir, si $k = 1, 2, 3$). $169 \cdot 3^{14} + 3^{4k+1} = 3^{4k}(169 \cdot 3^{14-4k} + 3)$ no podría ser cuadrado perfecto, ya que lo es el primer factor, pero no puede serlo el segundo: sumando 3 a un cuadrado perfecto mayor que 1 no puede obtenerse otro cuadrado perfecto.

Si $n > 14$ (es decir, si $k \geq 4$). $169 \cdot 3^{14} + 3^n = 3^{14}(169 + 3^{n-14})$. Para que sea cuadrado perfecto deberá ser $169 + 3^{n-14} = q^2$, en cuyo caso se tendría que $3^{n-14} = q^2 - 169 = (q + 13)(q - 13)$. Estos dos factores habrían de ser ambos potencias de 3, lo que sólo es posible para $q = 14$. En tal caso

$$3^{n-14} = 27 = 3^3.$$

Por tanto, el único caso posible es $n = 17$, y se cumplirá que

$$m^2 = 3^{14} \cdot (169 + 27) = 3^{14} \cdot 196 = 3^{14} \cdot 14^2 = (3^7 \cdot 14)^2.$$

Concluimos que sólo hay una solución: $n = 17$.

Solución 2.

Queremos que

$$a_n = 2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n = \square.$$

Pongamos $5^2 = 25 = 16 + 9$; así tenemos

$$a_n = 2^4 \cdot 3^{16} + 16 \cdot 3^{14} + 3^{16} + 3^n = \square,$$

$$a_n = 3^{14}(2^4 \cdot (3^2 + 1) + 3^2) + 3^n = \square,$$

$$a_n = 3^{14}169 + 3^n = \square.$$

Para que la potencia de 3 en $\square$ sea par, debe ser n par, $n = 2m$.

Si $n \leq 14$ entonces debería ser

$$a_n = 3^{2m}(3^{14-2m}13^2 + 1) = \square,$$

pero al sumar 1 a un cuadrado positivo nunca puede resultar un cuadrado. Luego deberá ser $n > 14$.

Considerando ahora $n > 14$, podemos descartar los pares tomando congruencias módulo 4, ya que todo cuadrado es congruente con 0 o con 1 módulo 4, pero si n es par resulta que

$$3^{14}(169 + 3^{n-14}) \equiv 2 \mod (4).$$

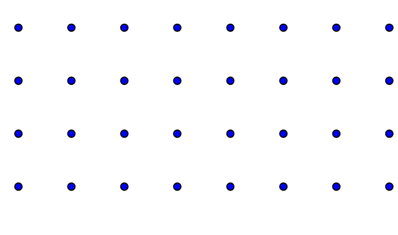
Por lo tanto n es impar y, en ese caso, el supuesto cuadrado es congruente con 0 módulo 4.

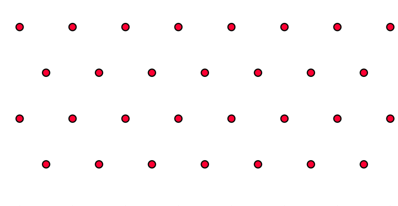
Para encontrar soluciones, como $169 + 3^{n-14}$ es un cuadrado, se tiene que lo que se suma a 169 es un impar mayor o igual que 27 (196 es el cuadrado más próximo), por lo que

$$3^{n-14} = (27 + j)(j + 1), \quad j \geq 0.$$

Pero está claro que la única solución de la ecuación anterior es $j = 0$, lo que nos da como solución $n = 17$.

40. ¿Se puede dibujar un triángulo equilátero que tenga los tres vértices sobre puntos de una malla cuadrada? ¿Qué polígonos regulares se pueden dibujar con todos los vértices en puntos de una malla cuadrada? ¿Se puede dibujar un cuadrado con los cuatro vértices sobre puntos de una malla triangular equilátera? ¿Qué polígonos regulares se pueden dibujar con todos los vértices en puntos de una malla triangular equilátera? (Estas mallas son como las de las figuras, pero se entiende que se pueden extender hasta el infinito.)





Solución.

En la malla cuadrada:

(a) No se puede dibujar un triángulo equilátero con los tres vértices en puntos de la malla.

Demostración.

Supongamos que se pudiera dibujar uno. Entonces, por un lado, el área Δ del triángulo sería un número racional, ya que calculándola por ejemplo con la *fórmula de Pick*, si la unidad de área es el área del menor cuadrado de la malla,

$$\Delta = i + \frac{b}{2} - 1,$$

donde i, el número de puntos de malla interiores al triángulo, y b, el número de puntos de malla en el borde del triángulo incluidos los vértices, son números enteros.

(También se podría razonar esto utilizando la fórmula $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ siendo (x_i, y_i) las coordenadas (enteras) de los tres vértices).

Pero, por otro lado, si la longitud del lado del triángulo (en unidades de longitud de malla) es ℓ, el área del triángulo es

$$\Delta = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4},$$

donde, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son las coordenadas de malla de dos vértices del triángulo, $\ell^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ es un número entero, luego Δ es un número irracional, contradicción.

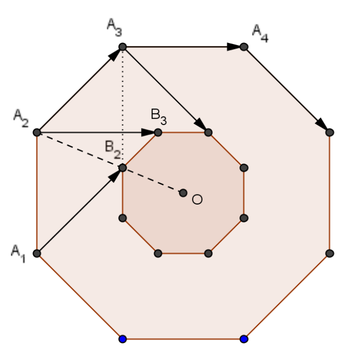
(b) El único polígono regular que se puede dibujar con todos los vértices en puntos de la malla es el cuadrado.

Demostración.

(b.1) No hay hexágonos regulares: si hubiera uno, sean A_1, A_2, A_3 tres vértices consecutivos. El vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A_2A_3}$ es un vector de la malla y por tanto el punto $B = A_1 + \overrightarrow{u}$ que completa un rombo con A_1, A_2 y A_3, es un punto de la malla y el $\triangle A_1A_2B$ sería un triángulo equilátero con vértices en la malla, absurdo.

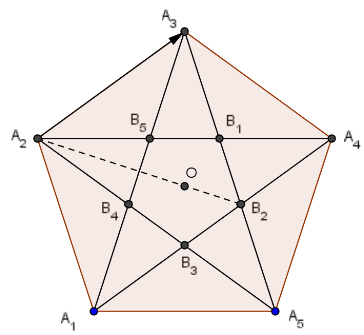
(b.2) Sea $n > 6$ fijo; no hay n-gonos regulares: si hubiera alguno, sean A_1, A_2, A_3 tres vértices consecutivos del n-gono de lado más pequeño posible. Completando un rombo $A_1A_2A_3B_2$, el punto B_2 será un punto de la malla.

Además, B_2 está en la recta que une A_2 con el centro O del n-gono, ya que A_2B_2 es bisectriz del $\angle A_1A_2A_3$. Si ℓ es es lado del n-gono y r su circunradio, se tiene $\ell < r$ porque $n > 6$. Luego B_2 está en el segmento entre O y A_2.



Al hacer esto para cada terna de vértices consecutivos resulta un n-gono regular (B_i) de menor área que el (A_i) y por lo tanto de menor lado, absurdo.

(b.3) No hay pentágonos regulares: si hubiera uno, con la construcción anterior para $n = 5$ también resulta un pentágono regular más pequeño, en este caso invertido respecto del original, porque O pertenece en cada caso al segmento A_iB_i .



En la malla triangular equilátera:

(c) No se puede dibujar un cuadrado con los cuatro vértices en puntos de la malla.

Demostración.

Supongamos que se pudiera dibujar uno. Tomando como unidad de área el área del menor triángulo equilátero de la malla, la *fórmula de Pick* para esta malla da el área de cualquier polígono con vértices en la malla con la cuenta $2i + b - 2$, donde i es el número de puntos de malla interiores, y b es el número de puntos de malla en el borde del polígono, incluidos los vértices. Entonces, por un lado, el área $\square$ del cuadrado así calculada sería un número entero.

Por otro lado, si la unidad de longitud es la longitud del menor segmento de malla, el cuadrado de la distancia d entre dos puntos de la malla $(0, 0)$ y (a, b) es, por el teorema del coseno,

$$d^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\pi/3) = a^2 + b^2 + ab.$$

Y el área de un cuadrado de lado ℓ es $\ell^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$ (ya que el área de un cuadrado de lado 1 es ahora $\frac{4}{\sqrt{3}}$). Entonces tendríamos

$$\square = \ell^2 \frac{4}{\sqrt{3}}\,,$$

donde, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son las coordenadas de malla de dos vértices consecutivos del cuadrado, $\ell^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$ es un número entero, así que $\square$ sería un número irracional, contradicción.

(d) Los únicos polígonos regulares que se pueden dibujar en una malla triangular equilátera son triángulos equiláteros y hexágonos: Sirve una demostración ahora completamente similar a la hecha para la malla cuadrada, pues la traslación por un vector cualquiera definido por dos puntos de la malla conserva la malla.

41. Demuestra que si a, b y c son números reales positivos, se cumple la desigualdad

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2.$$

Solución 1.

Aplicando la desigualdad AM-GM a los términos de cada factor, se obtiene

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2) \geq (3\sqrt[3]{a^3b^3c^3})(3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}) = 9a^2b^2c^2.$$

Solución 2.

Reordenando los términos de cada factor y aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2) \geq (\sqrt{a^2b^2c^2}+\sqrt{a^2b^2c^2}+\sqrt{a^2b^2c^2})^2 = 9a^2b^2c^2.$$

Solución 3.

Desarrollando el término de la izquierda de la desigualdad, y aplicando la desigualdad AM-GM, se obtiene

$$\begin{aligned}(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2) &= a^3b^3+a^2b^2c^2+a^4bc+ab^4c+b^3c^3+a^2b^2c^2\\ &\quad + a^2b^2c^2+abc^4+a^3c^3 \geq 9\sqrt[9]{a^{18}b^{18}c^{18}} = 9a^2b^2c^2.\end{aligned}$$

42. Halla las soluciones enteras de la ecuación

$$x+y = x^2-xy+y^2.$$

Solución.

Pongamos $x+y=a$; sustituyamos a la derecha $y=a-x$.

$$a = x^2 - x(a-x) + (a-x)^2,$$

$$a = x^2 - ax + x^2 + a^2 - 2ax + x^2,$$

$$3x^2 - 3ax + a^2 - a = 0,$$

que tratada como ecuación de 2° grado en x permite despejar

$$x = \tfrac{1}{6}(3a \pm \sqrt{12a-3a^2}) = \tfrac{1}{6}(3a \pm \sqrt{3a(4-a)}).$$

Para que x tenga valores enteros el discriminante $3a(4-a)$ debe ser no negativo y cuadrado perfecto. Para que sea no negativo, debe ser $a \in [0,4]$, y los únicos valores enteros de a en este intervalo para los cuales $3a(4-a)=\square$ son $a=0$, 1, 3 y 4.

Sustituyendo estos valores de a resultan las siguientes soluciones enteras de la ecuación (que son todas):

$$a=0, \quad x=0, \quad y=0$$

$$a=1, \quad x=1, \quad y=0; \qquad x=0, \quad y=1;$$

$$a=3, \quad x=2, \quad y=1; \qquad x=1, \quad y=2;$$

$$a=4, \quad x=2, \quad y=2.$$