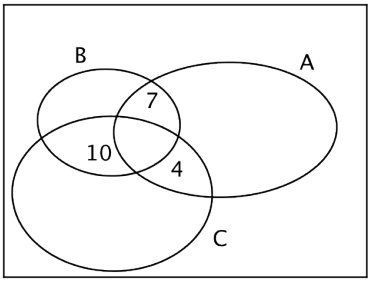
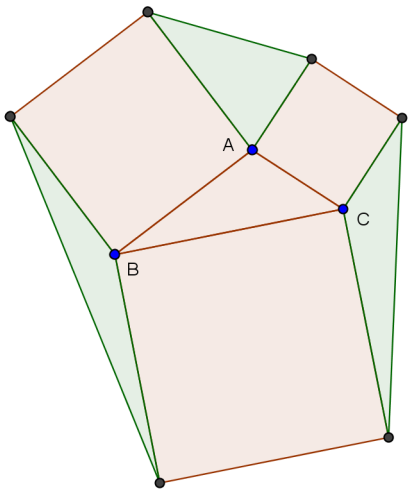
31. En una calle hay 150 casas. Cada mañana se distribuyen por las casas tres periódicos distintos, digamos A, B, C. Sabemos que el periódico A se distribuye en 40 casas, B en 35 casas y C en 60 casas. En 7 casas se distribuyen A y B, en 10 casas B y C, en 4 casas A y C. 34 casas no reciben ningún periódico. ¿Cuántas casas reciben los tres periódicos?

Solución.

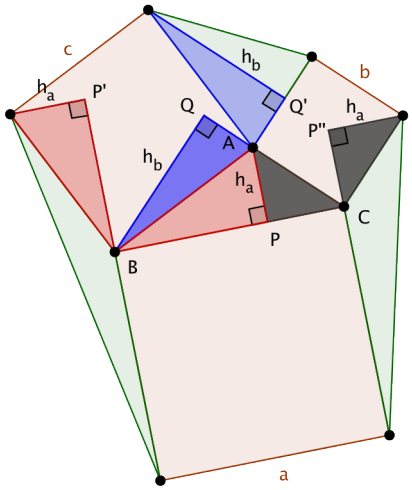
En primer lugar, hay $150 - 34 = 116$ casas que reciben algún periódico. El periódico A se recibe en 40 casas, es decir, contando las casas que sólo reciben el periódico A, las que reciben sólo el A y el B, las que reciben sólo el A y el C y las que reciben los tres simultáneamente. Del mismo modo se razona con la distribución del B y el C. De esta forma, se tiene que $116 = 40 + 35 + 60 - (4 + 7 + 10) + \#\{\text{casas que reciben A, B y C}\}$. De este modo, hay 2 casas que reciben los tres periódicos.



32. Dado un triángulo ABC, se construyen, en su plano y hacia fuera de él, cuadrados sobre sus tres lados. Después se construyen tres triángulos más, como se ve en la figura. Prueba que los cuatro triángulos tienen la misma área.



Solución.



33. Demuestra que el cuadrado de un número entero es un número de la forma $8n$, o bien de la forma $8n+1$, o bien de la forma $8n+4$.

Solución.

Llamamos z al número entero. z puede ser par o impar. Probaremos que en cada uno de estos casos se cumple la tesis.

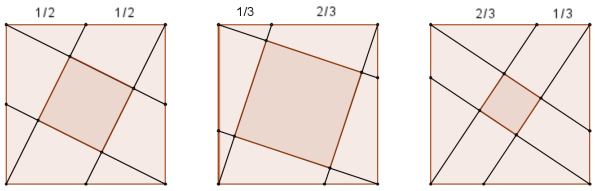
Primer caso (z par): Sea $z = 2k$, con k un número entero. Luego $z^2 = 4k^2$. Para k^2 hay dos posibilidades: que sea par o impar.

a) Si k^2 es par entonces $k^2 = 2p$, donde p es un entero, y por lo tanto $z^2 = 4k^2 = 8p$, cumpliéndose lo pedido.

b) Si k^2 es impar entonces $k^2 = 2q+1$, donde q es un número entero. Luego $z^2 = 4k^2 = 4(2q+1) = 8q+4$, obteniéndose lo pedido.

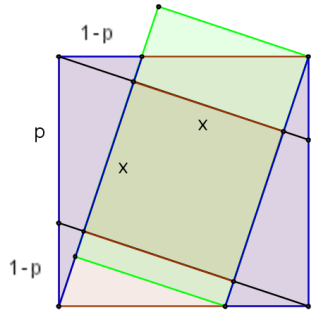
Segundo caso (z impar): En este caso $z = 2r+1$, con r un número entero. Desarrollando el cuadrado del binomio se obtiene que $z^2 = 4(r^2+r)+1 = 4r(r+1)+1$. Puesto que el producto de dos números consecutivos es siempre par (excluyendo el caso cero) se concluye que $r(r+1) = 2m$ para algún entero número entero m, obteniéndose que $z^2 = 8m+1$.

34. Al conectar cada vértice de un cuadrado de lado 1 con un punto situado en uno de los lados no adyacentes a ese vértice y que divide el lado en dos segmentos que están en una misma razón, se origina un cuadrado interior más pequeño. ¿Cuál es el área del cuadrado interior en cada caso de la figura? ¿Y en un caso general?



Solución.

En un caso general, los lados se dividen en la razón $p\colon 1-p$ y el lado del cuadrado interior es x.



En la figura, el área 1 del cuadrado grande es igual a la suma de los dos triángulos azules congruentes y el rectángulo verde central, es decir,

$$1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-p) + x \cdot \sqrt{1+(1-p)^2} = 1 - p + x\sqrt{2-2p+p^2},$$

de donde se obtiene que

$$x = \frac{p}{\sqrt{2-2p+p^2}} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{p^2}{2-2p+p^2}\,.$$

Así, en los casos particulares propuestos: cuando $p = \frac{1}{2}$, el área del cuadrado central es $\frac{1}{5}$. Cuando $p = \frac{2}{3}$, el área del cuadrado central es $\frac{2}{5}$. Cuando $p = \frac{1}{3}$, el área del cuadrado central es $\frac{1}{13}$.

35. Demuestra que sea cual sea el número $n \in \mathbb{N}$, el número n^2+3n+5 no puede ser divisible por 121.

Solución.

Considerando la tabla siguiente de congruencias módulo 11,

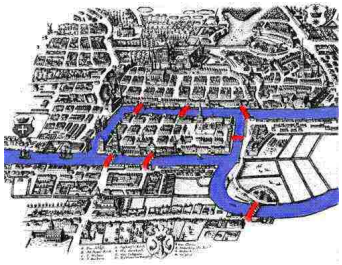
n	n^2	$3n$	n^2+3n+5
0	0	0	5
1	1	3	$\overline{2}$
2	4	$\overline{5}$	4
3	$\overline{2}$	$\overline{2}$	1
4	5	1	0
5	3	4	1
$\overline{5}$	3	$\overline{4}$	4
$\overline{4}$	5	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{2}$	2	5
$\overline{2}$	4	5	3
$\overline{1}$	1	$\overline{3}$	3

vemos que el único caso en que n^2+3n+5 es múltiplo de 11 es cuando $n = 11m+4$. Pero en este caso,

$$\begin{aligned} n^2+3n+5 &= (11m+4)^2 + 3(11m+4) + 5 \\ &= 121m^2 + 88m + 16 + 33m + 12 + 5 \\ &= 121(m^2+m) + 33 \equiv 33 \pmod{121}, \end{aligned}$$

luego n^2+3n+5 nunca es múltiplo de 121.

36. Al pasar por la ciudad de Regiomonte en Borussia, el río forma una isla que se llama Kneiphof, y hay siete puentes que permiten cruzar el río. ¿Hay algún recorrido por la ciudad que atraviese cada uno de los siete puentes y solamente una vez cada uno?



Solución.

"Es el famoso problema de los siete puentes de Königsberg". La solución original de Euler en 1736:

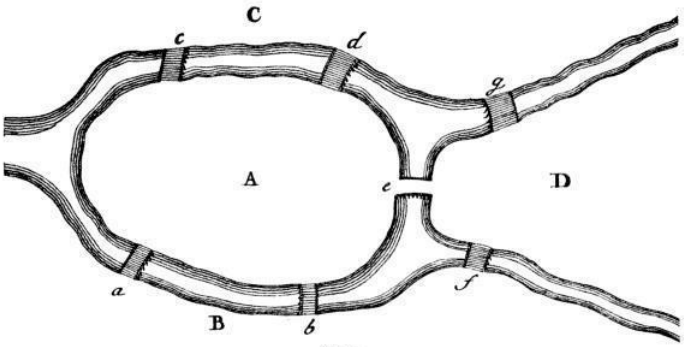


Fig. 1.

9. In casu igitur pontium transeundorum Regiomontano (Fig. 1), quia in insulam A quinque pontes deducunt a, b, c, d, e, necesse est, ut in designatione transitus per hos pontes littera A ter occurrat. Deinde littera B, quia in regionem B tres pontes conducunt, bis debet occurrere similique modo littera D bis debet occurrere atque etiam littera C bis. In serie ergo octo litterarum, quibus transitus per septem pontes deberet designari, littera A ter adesse deberet, litterarum vero B, C et D unaquaeque bis; id quod in serie octo litterarum omnino fieri nequit. Ex quo perspicuum est per septem pontes Regiomontanos talem transitum institui non posse.

Es decir (la traducción al castellano que sigue, debida a Miguel Muntaner, se puede leer en el libro J. R. Newman, *Sigma: el mundo de las matemáticas*, Vol. 4, Grijalbo, 1985):

"9. En el caso de los puentes de Königsberg, puesto que son cinco los puentes que conducen a la isla A, es necesario que en la designación del recorrido por estos puentes aparezca tres veces dicha letra. También la letra B debe aparecer dos veces, puesto que a la región B conducen tres puentes, y de igual modo la letra D debe aparecer dos veces, y también dos veces la letra C. En la serie de ocho letras, con que debe designarse el recorrido por los siete puentes, la letra A tendría que estar presente tres veces, y cada una de las letras B, C y D, dos veces; lo cual es totalmente imposible en una serie de ocho letras. Con lo cual vemos que no se puede realizar un tal recorrido por los siete puentes de Königsberg."