11. Demostrar que

a) 27 es la suma de tres enteros consecutivos.

b) 3^5 es la suma de tres enteros consecutivos.

c) cualquier número divisible por 3, es la suma de tres enteros consecutivos.

d) 3^{100} es la suma de 9 enteros consecutivos.

Solución.

Apartado a). La afirmación será cierta si encontramos algún entero a tal que $27 = (a-1)+a+(a+1)$, y esto se cumple para $a = 9$, con lo cual $27 = 8+9+10$.

Apartado b). Procediendo análogamente al apartado a), se deduce que la afirmación es cierta si $a = 3^4$, con lo que $3^5 = (3^4-1)+3^4+(3^4+1)$.

Apartado c). Sea n=3k. La afirmación será cierta si existe a tal que $3k = 3a$, por tanto $a = k$.

Apartado d). La afirmación es cierta si existe a tal que (usando la simetría de los números consecutivos elegidos, $(a-4), (a-3)$, etc.) $3^{100} = 9a$, que es equivalente a $9\cdot 3^{98} = 9a$. Esto se cumple para $a = 3^{98}$, con lo cual $3^{100} = (3^{98}-4)+(3^{98}-3)+(3^{98}-2)+\cdots+(3^{98}+4)$.

12. Demostrar que

$$\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 12}+\cdots+\frac{1}{47\cdot 52}<\frac{1}{10}$$

Solución. Observamos primero que

$$\frac{1}{x(x+5)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}\right).$$

Si llamamos S a la suma de la parte izquierda de la desigualdad, aplicando la igualdad de arriba tenemos que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{(2+5(n-1))\cdot(2+5n)}\right) = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2+5(n-1)}-\frac{1}{2+5n}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{52}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{50}{104}\right) = \frac{10}{104} < \frac{10}{100} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

13. Dados los números

$$\frac{a_1}{b_1} = 1; \frac{a_2}{b_2} = 2; \cdots; \frac{a_{100}}{b_{100}} = 100$$

Hallar el valor del número

$$A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}{b_1+2b_2+\cdots+100b_{100}}.$$

Solución. A partir de la hipótesis, se tiene que

$$1 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{2b_2} = \cdots \frac{a_{100}}{100b_{100}}.$$

El resultado se sigue de la propiedad de una serie de razones, que dice que si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \cdots = r, \quad \text{entonces} \quad \frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots} = r;$$

por tanto,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}}{b_1 + 2b_2 + \cdots + 100b_{100}} = 1.$$

14. Hallar dos números naturales tales que si sumamos el triplo del primero más la mitad del segundo obtenemos el mismo resultado que si sumamos al primer número el doble del segundo.

Solución. Sean x, y estos números. Se tiene que

$$3x + \frac{y}{2} = x + 2y,$$

de donde $x = \frac{3y}{4}$. Por tanto, x es un número natural si 4 es divisor de y De aquí, podemos poner $y = 4 \cdot k$ y las soluciones son los pares (x, y) de la forma

$$x = 3 \cdot k, \quad y = 4 \cdot k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

15. Sean x, y, z tres números positivos tales que

$$x = \frac{2y}{y+1}, \; y = \frac{2z}{z+1}, \; z = \frac{2x}{x+1}.$$

Probar que $x = y = z = 1$.

Solución. En el sistema

$$\begin{cases} x &= \frac{2y}{y+1} \\ y &= \frac{2z}{z+1} \\ z &= \frac{2x}{x+1} \end{cases}$$

sustituimos la primera ecuación en la tercera, y obtenemos $z = \frac{\frac{4y}{y+1}}{\frac{3y+1}{y+1}} = \frac{4y}{3y+1}$, ya que y es un número positivo. Sustituyendo ahora en la segunda ecuación, se tiene

$$y = \frac{8y}{7y+1} \Leftrightarrow 7y^2 = 7y \Leftrightarrow y = 1,$$

teniendo en cuenta de nuevo que $y > 0$. Sustituyendo convenientemente, se obtiene que $x = y = z = 1$.

16. Dados 7 enteros positivos distintos, cuya suma es mayor que 100. Demostrar que existen tres de ellos cuya suma es mayor o igual que 50.

Solución. Sean $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$ los siete enteros positivos distintos, ordenados de manera creciente. Tenemos que

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 > 100.$$

Vamos a demostrar lo que se nos pide por reducción al absurdo. Supongamos que $a_5 + a_6 + a_7 < 50$. De este modo,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 100 - (a_5 + a_6 + a_7) > 50,$$

de donde se deduce que $a_4 > 14$, ya que $11 + 12 + 13 + 14 = 50$. Por tanto, $a_4 \geq 15$, pero entonces

$$a_5 + a_6 + a_7 \geq 16 + 17 + 18 = 51,$$

contradicción.