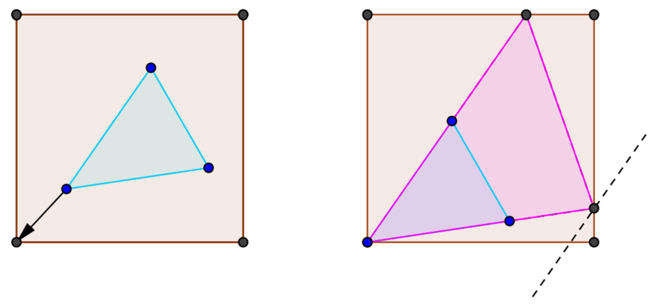
Seminario de problemas-Bachillerato. Curso 2012-13. Hoja 17

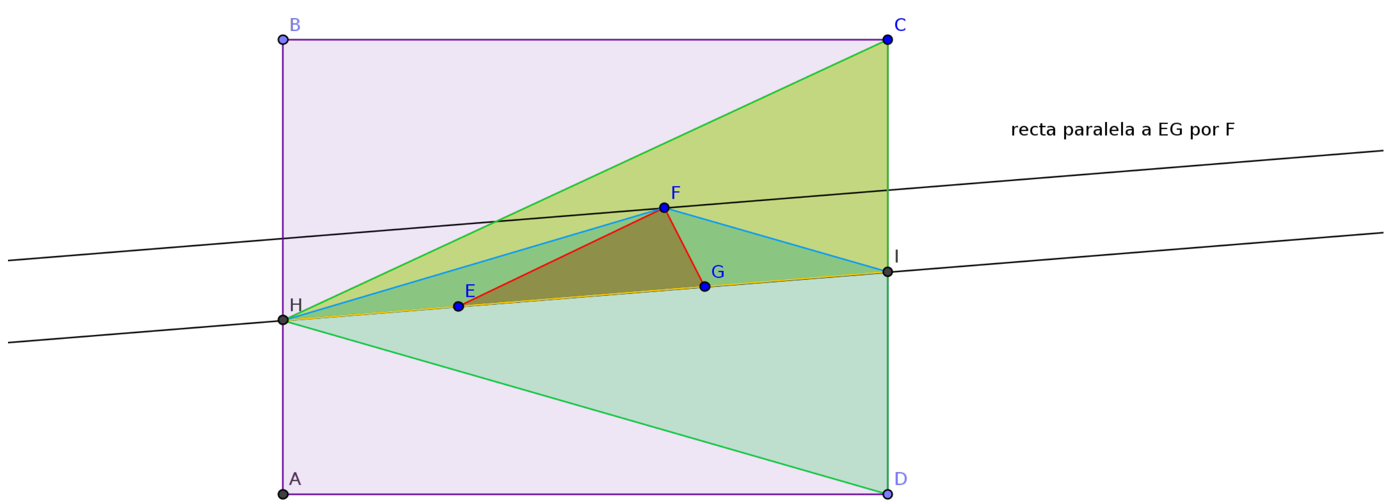
101. Prueba que el área de cualquier triángulo inscrito en un cuadrado de área 2 no puede ser mayor que 1.

Solución 1.



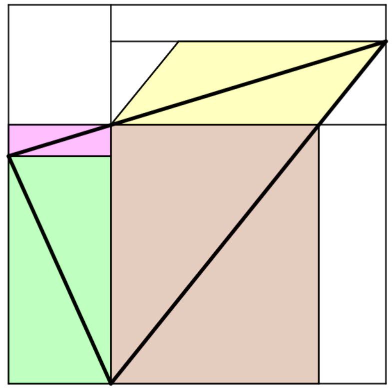
Solución 2.

Todo triángulo contenido en un rectángulo tiene área menor o igual que la mitad del área del rectángulo



área del triángulo EFG $\leq$ área del triángulo HFI $\leq$ área del triángulo HCI $\leq$ área del triángulo HCD$=\dfrac{1}{2}$ área del rectángulo ABCD

Solución 3.



102. Te permiten hacer dos operaciones a una n-tupla ordenada de ceros y unos: (1) cambiar el primer dígito empezando por la izquierda, y (2) cambiar el dígito siguiente al primer 1 que aparezca empezando por la izquierda. Prueba que con esas operaciones podrías transformar una n-tupla cualquiera en otra n-tupla cualquiera.

Solución.

Vamos a probar por inducción sobre n lo que nos piden, es decir, que se puede transformar una n-tupla cualquiera de ceros y unos en otra n-tupla cualquiera de ceros y unos.

Para $n = 1$ es cierto: $0 \overset{(1)}{\leftrightarrows} 1$.

Suponemos cierto para $n = k \geq 1$ que cualquier k-tupla ordenada de ceros y unos se puede reducir mediante las operaciones descritas en otra k-tupla cualquiera de ceros y unos. Consideremos una $(k+1)$-tupla ordenada $a_1 \ldots a_k a_{k+1}$. Veamos que podemos pasarla a otra $(k+1)$-tupla ordenada cualquiera $b_1 \ldots b_k b_{k+1}$.

Si $a_{k+1} = b_{k+1}$,

$$[a_1 \ldots a_k]a_{k+1} \overset{(HI)}{\to} [b_1 \ldots b_k]a_{k+1} = [b_1 \ldots b_k]b_{k+1}.$$

Si $a_{k+1} \neq b_{k+1}$,

$$[a_1 \ldots a_k]a_{k+1} \overset{(HI)}{\to} [00 \ldots 01]a_{k+1} \overset{(2)}{\to} [00 \ldots 01]b_{k+1} \overset{(HI)}{\to} [b_1 \ldots b_k]b_{k+1}.$$

Aplicando el principio de inducción, nuestro enunciado es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

103. Hay n coches idénticos parados en distintos puntos de una autopista circular. La cantidad total de gasolina que llevan los coches es suficiente para que uno de ellos pueda hacer el recorrido completo de la autopista. ¿Se puede encontrar un coche que pudiera hacer ese recorrido completo tomando gasolina prestada de los otros coches a lo largo de su ruta, sea cual sea la distribución de los coches en la autopista y sea cual sea la distribución de la gasolina entre los coches?

Solución.

La respuesta es afirmativa, y se puede demostrar por inducción sobre n. Si hay sólo un coche la conclusión es trivial. Supongamos que es cierto para $k - 1$ coches ($k > 1$) y consideremos la situación con k coches.

Es claro que al menos uno de los coches (llamémosle A) debe tener gasolina suficiente para conducir hasta el siguiente coche, B. Quitemos el coche B de la carretera añadiendo su gasolina a la del coche A. Ahora quedan $k-1$ coches en la autopista con la misma cantidad total de gasolina que tenían inicialmente los k coches, esto es, suficiente para que uno de ellos pueda dar la vuelta completa. Aplicando la hipótesis de inducción, existe entonces un coche C que puede dar la vuelta completa. Pero darse cuenta de que este coche C puede hacer el recorrido completo también en la situación inicial, cuando el coche B está presente en la autopista.

104. Calcula sin muchas operaciones el número

$$\frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(2012^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(2011^4+\frac{1}{4}\right)}.$$

Solución.

Podemos escribir el número como

$$\prod_{k=1}^{1006}\frac{\left((2k)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left((2k-1)^4+\frac{1}{4}\right)}.$$

Usando en cada factor la identidad

$$n^4+\frac{1}{4}=\left(n^2-n+\frac{1}{2}\right)\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right),$$

la expresión se simplifica a

$$\prod_{k=1}^{1006}\frac{\left((2k)^2+(2k)+\frac{1}{2}\right)\left((2k)^2-(2k)+\frac{1}{2}\right)}{\left((2k-1)^2+(2k-1)+\frac{1}{2}\right)\left((2k-1)^2-(2k-1)+\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\prod_{k=1}^{1006}\frac{\left((2k)^2+(2k)+\frac{1}{2}\right)}{\left((2k)^2-(6k)+2+\frac{1}{2}\right)},$$

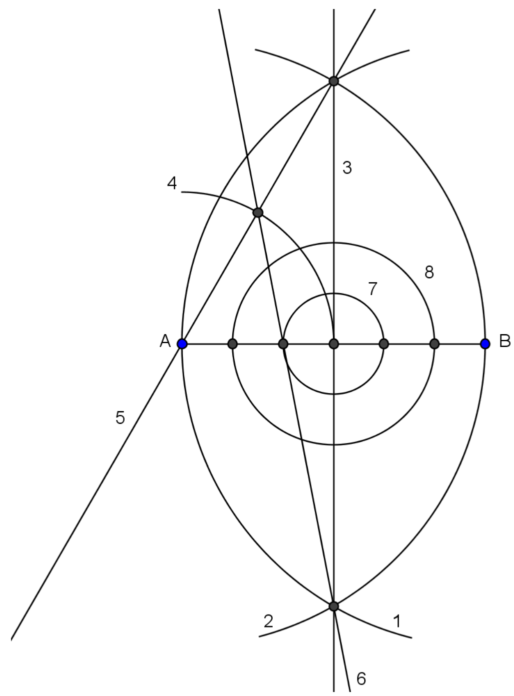
que completando cuadrados queda

$$\prod_{k=1}^{1006}\frac{\left((2k+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right)}{\left((2k-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}\right)}=\prod_{k=1}^{1006}\frac{\left((2k+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right)}{\left((2(k-1)+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right)}$$
$$=\frac{\left((2012+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right)}{\left((\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right)}2\left((2012+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right)$$

que es igual a $2(2012^2+2012)+1=8100313$.

105. Trata de dividir un segmento rectilíneo AB dado en 6 partes iguales usando sólo regla y compás, trazando no más de 8 líneas, ya sean rectas o curvas.

Solución.


3
4
8
7
A
B
5
2
1
6