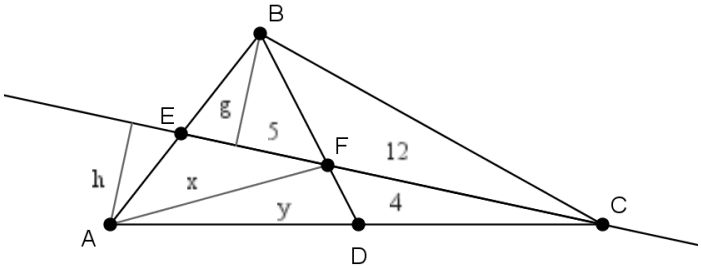
Seminario de problemas-ESO. Curso 2012-13. Hoja 11

64. Sea ABC un triángulo y D y E puntos en los lados AC y AB respectivamente. Las rectas BD y CE se cortan en un punto F tal que las áreas de los triángulos BEF, BFC y CFD son 5, 12, y 4 unidades cuadradas, respectivamente. Halla el área del $\triangle ABC$.

Solución.

Sean x e y las áreas, respectivamente, de los triángulos AEF y AFD.



A la vista del dibujo, se tiene, observando los triángulos AEF y AFC, y EBF y BFC:

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}EF \cdot h \\ 4+y &= \frac{1}{2}FC \cdot h, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5 &= \frac{1}{2}EF \cdot g \\ 12 &= \frac{1}{2}FC \cdot g. \end{cases}$$

De aquí, se obtienen las relaciones

$$\begin{cases} \frac{x}{EF} &= \frac{4+y}{FC} \\ \frac{5}{EF} &= \frac{12}{FC} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x}{4+y} = \frac{5}{12}. \tag{1}$$

Análogamente, a partir de los triángulos ABF y AFD, y BFC y FDC:

$$\begin{cases} \frac{5+x}{BF} &= \frac{4}{FD} \\ \frac{12}{BF} &= \frac{4}{FD} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{5+x}{y} = \frac{12}{4}. \tag{2}$$

De (1) y (2) se deduce el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 12x &= 20+5y \\ 5+x &= 3y, \end{cases}$$

cuyas soluciones son $x = \frac{85}{31}$ y $y = \frac{80}{31}$. Por tanto, el área de ABC es $21 + \frac{165}{31} = \frac{816}{31}$.

65. Encuentra todos los números naturales n para los cuales el número $\sqrt{n^2+n+1}$ es un número racional.

Solución 1.

Buscamos n tales que

$$\sqrt{n^2+n+1}=\frac{a}{b},$$

con $MCD(a,b)=1$. Así,

$$b^2n^2+b^2n+b^2=a^2,$$

de donde $a=\dot{b}$, con lo que $b=1$. De este modo,

$$\begin{aligned} n^2+n+1=a^2 &\Leftrightarrow 4n^2+4n+4=4a^2 \Leftrightarrow (2n+1)^2+3=(2a)^2 \\ &\Leftrightarrow (2a)^2-(2n+1)^2=3 \Leftrightarrow (2a-2n-1)(2a+2n+1)=3. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$\begin{cases} 2a-2n-1 &= 1 \\ 2a+2n+1 &= 3, \end{cases}$$

y de aquí se obtiene que $a=1$ y $n=0$ como solución única.

Solución 2.

Si $n\geq 1$, entonces

$$n^2<n^2+n+1<(n+1)^2,$$

luego $n^2+n+1\neq\square$, para todos los naturales $n\geq 1$. Por tanto, $n=0$ es la única solución.

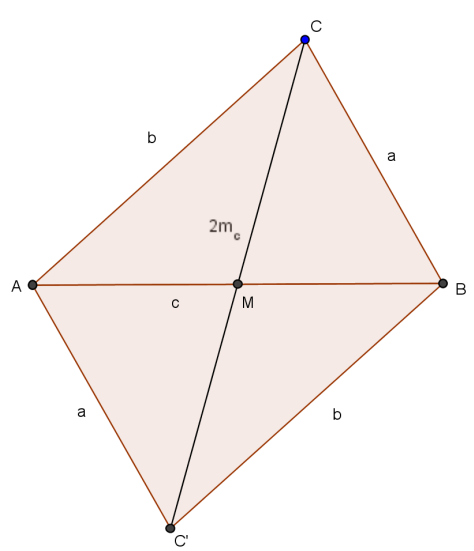
66. En un triángulo dado ABC, las medianas AD y BE son perpendiculares. Determina la longitud de la tercera mediana CF en términos de las longitudes $BC=a$ y $AC=b$.

Solución.

Teorema (Longitud de la mediana): *Si m_c es la mediana respecto del vértice C en un triángulo ABC, se tiene*

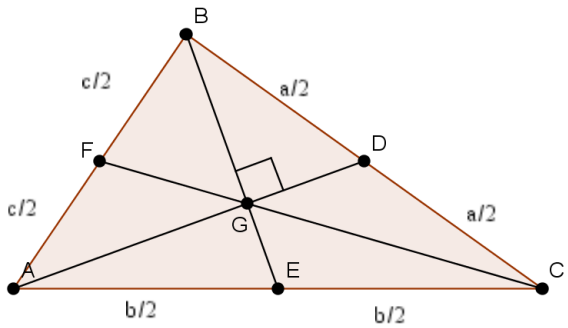
$$m_c^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

Demostración.



Es la *ley del paralelogramo* en el paralelogramo $CAC'B$: la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los cuatro lados.

Pasemos ahora a nuestro problema



Sea $BE = n$ y $AD = m$, y G el baricentro del triángulo. Por la propiedad del baricentro, $BG = \frac{2}{3}n$, $GE = \frac{1}{3}n$, $AG = \frac{2}{3}m$, $GD = \frac{1}{3}m$.

Además, $FG = \frac{c}{2}$, lo que se ve aplicando el teorema anterior y observando que el triángulo AGB es rectángulo. Como consecuencia,

$$FC = \frac{3c}{2}. \tag{3}$$

Por otro lado, aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos GDB y AGE,

$$\begin{cases} \frac{4}{9}n^2 + \frac{1}{9}m^2 & = & \frac{a^2}{4} \\ \frac{1}{9}n^2 + \frac{4}{9}m^2 & = & \frac{b^2}{4}, \end{cases}$$

de donde se obtiene

$$n^2 = \frac{3}{5}\Big(a^2 - \frac{b^2}{4}\Big); \qquad\qquad m^2 = \frac{3}{5}\Big(b^2 - \frac{a^2}{4}\Big).$$

Como además, en el triángulo AGB, se tiene

$$\frac{4}{9}m^2 + \frac{4}{9}n^2 = c^2,$$

se deduce que

$$c^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9}\Big(a^2 - \frac{b^2}{4} + b^2 - \frac{a^2}{4}\Big) = \frac{1}{5}(a^2 + b^2).$$

Por (3), concluimos que

$$FC = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}.$$

67. ¿Cuántas cifras tiene el número $N = 123\ldots 2005200620072008200920102011 2012$?

Solución.

Hay **9** números de 1 cifra, **90** números de 2 cifras, **900** números de 3 cifras y **1013** números de 4 cifras. Por tanto, el número total de cifras es

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 1013 = 6941.$$

68. ¿En cuántos ceros termina el número $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2011 \cdot 2012$?

Solución.

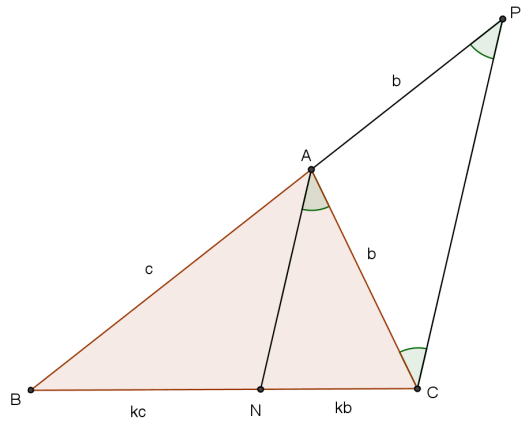
$$\left\lfloor \frac{2012}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2012}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2012}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2012}{625} \right\rfloor = 402 + 80 + 16 + 3 = 501.$$

69. Las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C de un triángulo ABC cortan a los lados opuestos en los puntos D, E y F respectivamente. Demuestra que si las rectas perpendiculares a los lados en los puntos D, E y F son concurrentes en un mismo punto, el triángulo es isósceles.

Solución.

Teorema de la bisectriz: *En un triángulo ABC, la bisectriz interior de cada ángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.*

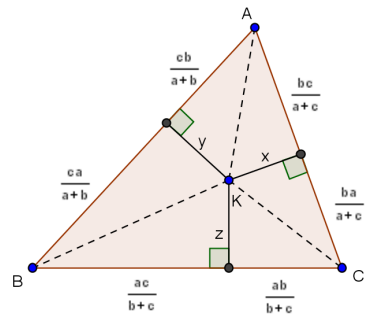
Demostración:



Sea AN la bisectriz interior del ángulo A. Trazamos por C una paralela a AN que corta a la prolongación del lado AB en el punto P. El $\triangle APC$ es isósceles, pues $\angle APC = \angle ACP = \angle NAC$. Luego $AP = AC = b$. Por el teorema de Thales, $BN = kc$ y $NC = kb$. Se tiene $BN/NC = c/b$.

Además, como $kc + kb = a$, se tiene $k = \frac{a}{b+c}$. Luego $BN = \frac{ac}{b+c}$ y $NC = \frac{ab}{b+c}$.

Pasemos al problema. Suponiendo concurrentes las perpendiculares por D, E y F en un punto K, utilizando el resultado anterior y el teorema de Pitágoras resulta (con la notación de la figura)



$$\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 - \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 = y^2 - x^2$$
$$\left(\frac{ca}{a+b}\right)^2 - \left(\frac{ca}{b+c}\right)^2 = z^2 - y^2$$
$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 - \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2 = x^2 - z^2,$$

de donde, sumando, obtenemos

$$\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{ca}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 = \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2.$$

De aquí, agrupando las fracciones con igual denominador,

$$\frac{b^2(c^2-a^2)}{(a+c)^2} + \frac{c^2(a^2-b^2)}{(a+b)^2} + \frac{a^2(b^2-c^2)}{(b+c)^2} = 0$$

y, simplificando,

$$\frac{b^2(c-a)}{a+c} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} + \frac{a^2(b-c)}{b+c} = 0.$$

Quitando denominadores queda

$$b^2(c-a)(a+b)(b+c) + c^2(a-b)(a+c)(b+c) + a^2(b-c)(a+b)(a+c) = 0,$$

expresión que se puede factorizar en la forma

$$(a+b+c)^2(a-b)(c-a)(b-c) = 0,$$

lo que indica que, o bien $a = b$, o bien $a = c$, o bien $b = c$. Luego el triángulo debe ser isósceles.

70. Resuelve la ecuación:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+x} = \frac{200}{101}$$

Solución.

Teniendo en cuenta que

$$1+2+\cdots+x=\frac{x(x+1)}{2},$$

la ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned}
\frac{2}{2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{2}{x(x+1)} &= \frac{200}{101}\\
\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{x(x+1)} &= \frac{100}{101}\\
1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1} &= \frac{100}{101}\\
1-\frac{1}{x+1} &= \frac{100}{101}\\
\frac{1}{101} &= \frac{1}{x+1},
\end{aligned}$$

con lo que $x=100$.