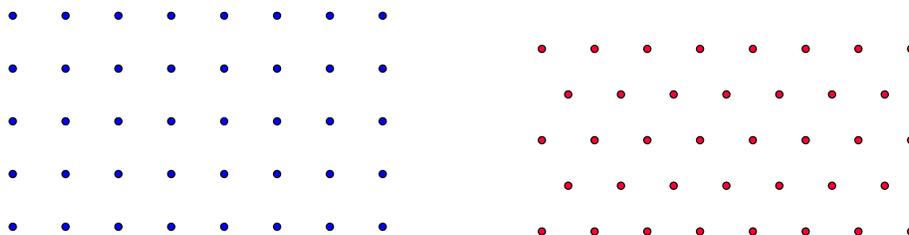


Seminario de problemas-Bachillerato. Curso 2012-13. Hoja 6

37. Dada una cuerda AB de una circunferencia de radio 1 y centro O , se considera la circunferencia γ de diámetro AB . Sea P es el punto de γ más alejado del punto O . ¿Cuál es el máximo valor que puede tener la distancia OP ?
38. Sean x, y, z números positivos. Demuestra las desigualdades
- (a) $\frac{x^2}{x+y} \geq \frac{3x-y}{4}$
- (b) $\frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{y+z} + \frac{z^3}{z+x} \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$
39. Determina todos los números enteros $n \geq 1$ para los cuales el número $2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n$ es un cuadrado perfecto.
40. ¿Se puede dibujar un triángulo equilátero que tenga los tres vértices sobre puntos de una malla cuadrada? ¿Qué polígonos regulares se pueden dibujar con todos los vértices en puntos de una malla cuadrada? ¿Se puede dibujar un cuadrado con los cuatro vértices sobre puntos de una malla triangular equilátera? ¿Qué polígonos regulares se pueden dibujar con todos los vértices en puntos de una malla triangular equilátera? (Estas mallas son como las de las figuras, pero se entiende que se pueden extender hasta el infinito.)



41. Demuestra que si a, b y c son números reales positivos, se cumple la desigualdad

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2.$$

42. Halla las soluciones enteras de la ecuación

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$