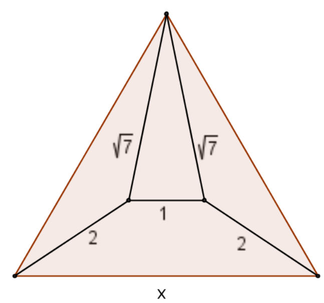
58. Prueba que, sea cual sea el número $n \in \mathbb{N}$, el número $n^2 + n + 1$ no tiene ningún divisor de la forma $3k + 2$ con $k \geq 0$.

59. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de dos o más puntos del plano, que no contiene tres puntos colineales. Un *remolino* es un proceso que empieza con una recta ℓ que pasa por un único punto P de $\mathcal{S}$. La recta ℓ rota en sentido horario con centro en P hasta encuentra por primera vez otro punto de $\mathcal{S}$, al que llamaremos Q. Entonces, con Q como nuevo centro de rotación, la recta ℓ sigue rotando en sentido horario hasta que encuentre otro punto de $\mathcal{S}$, y el proceso continúa así indefinidamente.

Demuestra que se puede elegir inicialmente un punto P de $\mathcal{S}$ y una recta ℓ que pasa por P tales que el remolino que resulta usa cada punto de $\mathcal{S}$ como centro de rotación infinitas veces.

60. Halla el lado x del triángulo equilátero de la figura siguiente



61. Sean $n \geq 3$ y $a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 1$. Demuestra que

$$(1 + a_2)^2 \cdot (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

62. Supón que el polinomio $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ tiene coeficientes enteros y que hay cuatro números enteros distintos a, b, c y d tales que $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$. Prueba que no hay ningún entero k tal que $f(k) = 8$.

63. Sea $ABCD$ un cuadrado, F el punto medio del lado CD y E un punto cualquiera del lado AB tal que $AE > EB$. Sea H el punto del lado BC tal que $DE \parallel FH$. Prueba que EH es tangente a la circunferencia inscrita en el cuadrado.