

Seminario de problemas-Bachillerato. Curso 2011-12. Hoja 8

43. Buscar el mínimo número natural $n > 0$ tal que $n/2$ sea un cuadrado, $n/3$ sea un cubo y $n/7$ sea una potencia séptima.

Solución

El número n ha de ser de la forma $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$.

Si $n/2$ es un cuadrado, $\alpha = \dot{2} + 1, \beta = \dot{2}, \gamma = \dot{2}$.

Si $n/3$ es un cubo, $\alpha = \dot{3}, \beta = \dot{3} + 1, \gamma = \dot{3}$.

Si $n/7$ es una potencia séptima, $\alpha = \dot{7}, \beta = \dot{7}, \gamma = \dot{7} + 1$.

De aquí resulta que

$$\alpha = \dot{21} \text{ y } \alpha = \dot{2} + 1$$

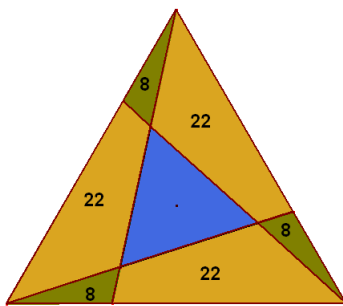
$$\beta = \dot{14} \text{ y } \beta = \dot{3} + 1$$

$$\gamma = \dot{6} \text{ y } \gamma = \dot{7} + 1,$$

y la solución más que pequeña es $\alpha = 21, \beta = 28, \gamma = 36$, de donde se tiene que

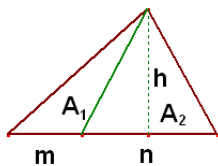
$$n = 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 7^{36}.$$

44. El triángulo de la figura es equilátero. Conociendo las áreas de las regiones coloreadas, halla el área del triángulo central.



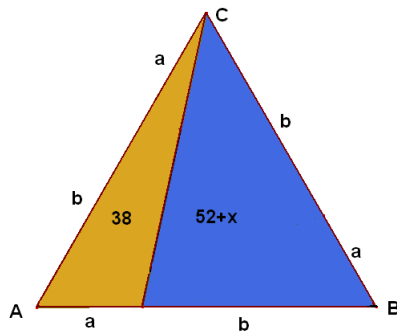
Solución 1.

Idea básica

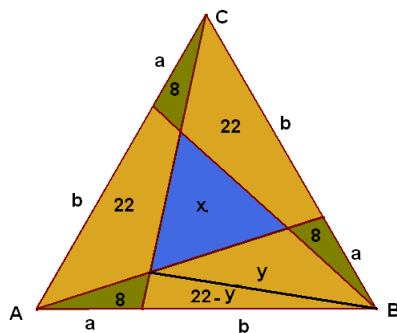


$\frac{A_1}{m} = \frac{A_2}{n}$. Pues tienen la misma altura.

Vamos con el problema



$$\frac{58}{a} = \frac{52+x}{b}, \quad \frac{b}{a} = \frac{52+x}{38}$$



Por otro lado:

$$\frac{y+8}{a} = \frac{22+x}{b}, \quad \frac{b}{a} = \frac{22+x}{y+8}$$

$$\frac{8}{a} = \frac{22-y}{b}, \quad \frac{b}{a} = \frac{22-y}{8}.$$

Igualemos

$$\frac{22+x}{y+8} = \frac{22-y}{8} = \frac{52+x}{38}.$$

De la igualdad

$$\frac{22-y}{8} = \frac{52+x}{38}$$

obtenemos

$$y = \frac{210-4x}{19}.$$

Sustituimos en la igualdad

$$\frac{22+x}{y+8} = \frac{52+x}{38}$$

y tenemos

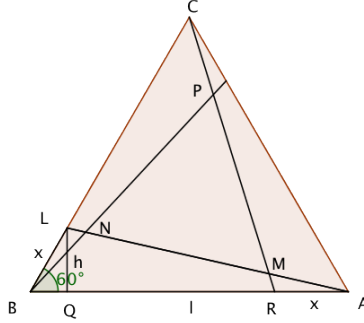
$$\frac{19(22+x)}{362-4x} = \frac{52+x}{38}$$

ecuación que simplificada queda

$$x^2 + 142x - 735 = 0,$$

que tiene como soluciones 5 y -147, con lo cual la solución es 5 hectáreas.

Solución 2.



Llamando x a la distancia AR , h a la altura del triángulo $\triangle BLA$ y l al lado AB del triángulo, tenemos:

$$h = x \sin 60^\circ; \quad BQ = x \cos 60^\circ;$$

y podemos escribir

$$AL^2 = \frac{3}{4}x^2 + \left(l - \frac{x}{2}\right)^2 = x^2 + l^2 - xl.$$

Como los triángulos $\triangle AMR$ y $\triangle ALB$ son semejantes, sus áreas están en la relación del cuadrado de sus lados.

$$\frac{x^2}{AL^2} = \frac{8}{38} \rightarrow \frac{x^2 + l^2 - xl}{x^2} = \frac{38}{8}.$$

Llamando r a la relación $\frac{l}{x}$, tenemos:

$$\begin{aligned} r^2 - r + 1 &= \frac{38}{8} \\ r^2 - r &= \frac{30}{8} \end{aligned}$$

cuya solución positiva es $r = \frac{l}{x} = \frac{5}{2}$.

De este modo, tenemos que $AR = \frac{2}{5}l$, y $BR = \frac{3}{5}l$, con lo que $\frac{BR}{AR} = \frac{3}{2}$. Llamamos s al área del triángulo $\triangle PNM$ y S al área del $\triangle ABC$. Aplicando el teorema de Routh, y por la simetría del triángulo, se tiene que

$$s = S \frac{\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - 1\right)^2}{\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1\right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1\right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1\right)} = \frac{S}{19}.$$

De aquí, como $S = s + 8 + 8 + 8 + 22 + 22 + 22$,

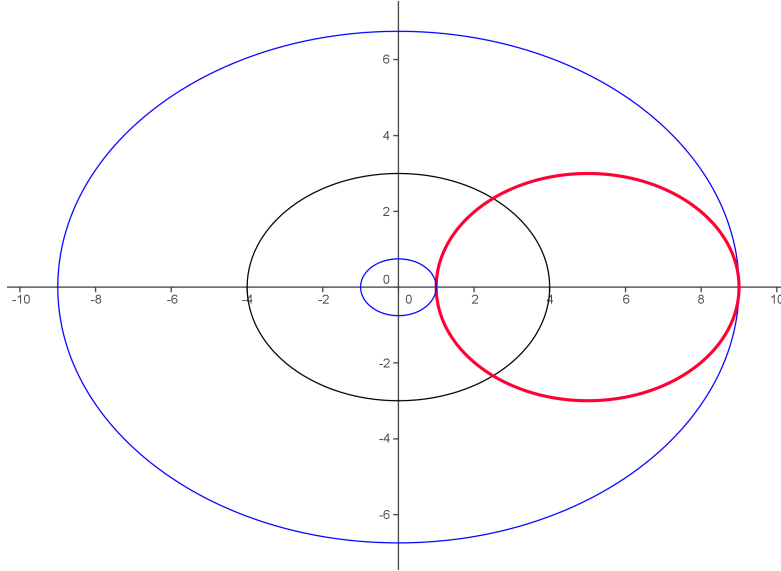
$$s = \frac{s + 90}{19},$$

de donde se obtiene $s = 5$.

45. Se considera la función definida por $f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$. Hallar el máximo y el mínimo valor que toma $f(x, y)$ sobre los puntos de la curva $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Solución 1.

Las curvas de nivel $f(x, y) = \text{constante}$ de la función $f(x, y)$ son elipses centradas en $(0, 0)$ homotéticas a la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ que tiene semiejes $a = 4$ (horizontal) y $b = 3$ (vertical).



Es evidente a partir de la figura que el máximo de $f(x, y)$ sobre la elipse (roja) $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ es $M = f(9, 0) = 81/16$, y el mínimo es $m = f(1, 0) = 1/16$ (estos valores se alcanzan sobre las curvas de nivel azules que son tangentes a la elipse roja).

Solución 2. Este problema se puede ver también como un problema de máximos y mínimos. En la ecuación de la elipse, despejamos $y^2/9$

$$\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{(x-5)^2}{16}$$

y sustituimos en la primera función, con lo que se obtiene una función de x , $f(x) = \frac{10x-9}{16}$. Ahora bien, como x está condicionada por la elipse, resulta que $-4 \leq x-5 \leq 4$. Es decir, $1 \leq x \leq 9$ y se trata de encontrar el máximo de la función $f(x) = \frac{10x-9}{16}$ cuando $1 \leq x \leq 9$. Al ser la función lineal, el mínimo se obtiene para $x = 1$ ($f(1) = 1/16$) y el máximo para $x = 9$ ($f(9) = 81/16$).