Seminario de problemas-ESO. Curso 2011-12. Hoja 7

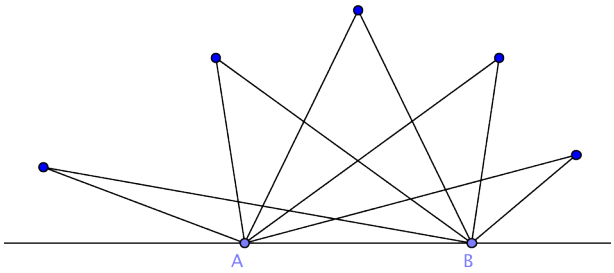
37. Considera siete puntos arbitrarios del plano y los 21 segmentos que los conectan entre sí. Demuestra que al menos tres de estos 21 segmentos son de distinta longitud.

Solución.

Escojamos dos de los 7 puntos A y B, de forma que la recta AB deje todos los puntos en un mismo semiplano.

Supongamos que sólo hubiera 2 longitudes distintas: a y b. Llegaremos a una contradicción.

Tomando AB como base, supondremos mide b, puedo formar 5 triángulos distintos.



(Estos triángulos podrían degenerar en segmentos). Para los otros dos lados, tengo longitudes a y b, es decir que los lados de los triángulos, en orden, serían baa, bab, bba, bbb, con lo que el quinto debería ser uno de estos, es decir, al menos dos de estos triángulos serían coincidentes y no tendríamos 7 puntos distintos.

38. Si p es un número real y las raíces de $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ están en progresión aritmética, halla dichas raíces.

Solución.

Sean a, $\frac{a+c}{2}$ y c dichas raíces.

Así pues, $x^3+2px^2-px+10 = (x-a)\left(x - \frac{a+c}{2}\right)(x-c)$, de donde, identificando coeficientes llegamos a:

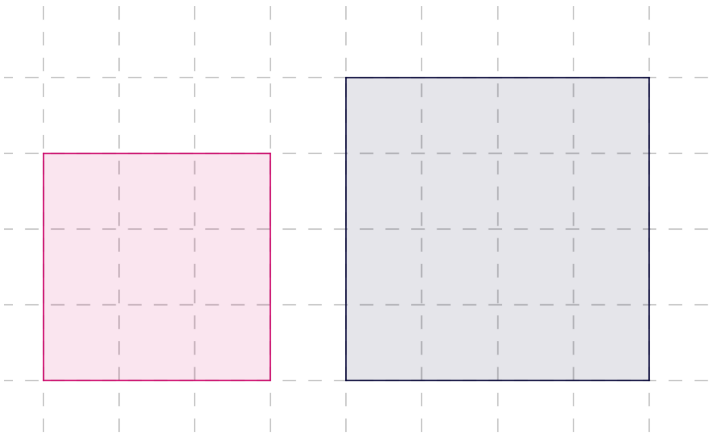
$$\frac{3}{2}(a+c) = -2p; \tag{1}$$

$$\frac{(a+c)^2}{2} + ac = -p; \tag{2}$$

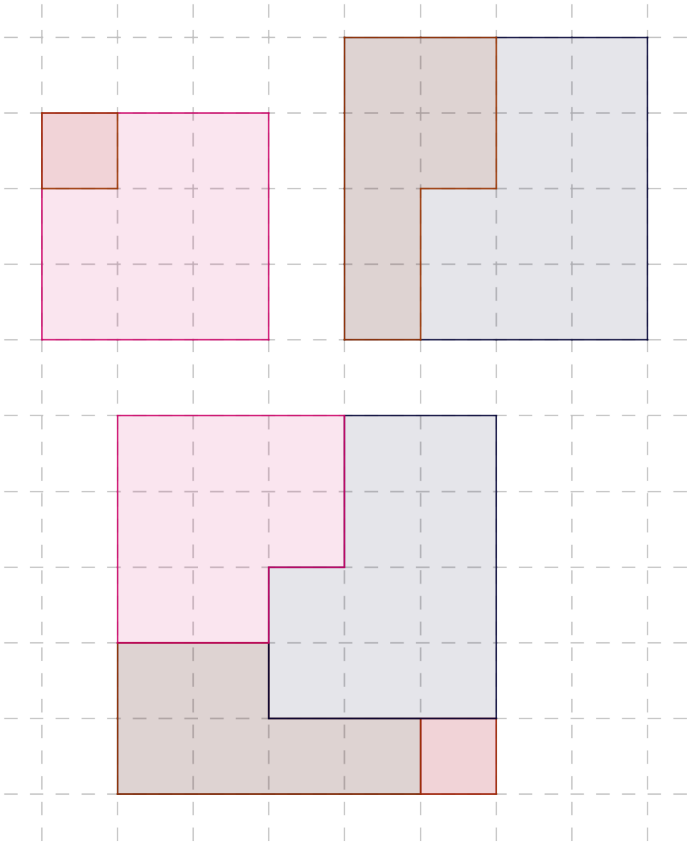
$$(a+c)\frac{ac}{2} = -10. \tag{3}$$

De (1) y (3) sigue que $\frac{ac}{3} = \frac{5}{p}$ y como $a + c = -\frac{4p}{3}$, llevando estos valores de $a + c$ y ac a (2) podemos concluir que $16p^3 + 18p^2 + 270 = 0$, es decir, $8p^3 + 9p^2 + 135 = 0$. Una raíz real de este polinomio es $p = -3$ y como $8p^3 + 9p^2 + 135 = (p + 3)(8p^2 - 15p + 45)$, sigue que $p = -3$ es la única raíz real de dicho polinomio. Esto nos lleva a $ac = -5, a + c = 4$, de donde a y c son 5y -1 y las raíces que nos piden son $-1, 2$ y 5.

39. Marcela tiene un retazo de tela de tamaño 3×3 y otro de tamaño 4×4. ¿Podrá Marcela cortar cada uno de sus retazos de tela en 2 trozos y coserlos luego para formar un retazo de tamaño 5×5?



Solución.



40. Ubica los números del 1 al 25 en las casillas de un tablero 5×5 de forma que todos ellos, excepto el 1 y el 2, sean exactamente la suma de dos de los números ubicados en sus casillas vecinas (se entiende vecino tanto en horizontal, vertical como diagonal).

Solución.

La siguiente es una de al menos 16 soluciones diferentes que tiene este acertijo de Gioulio Cesare que apareció en la revista *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 30, No. 2.

20	11	16	14	22
9	5	6	8	25
24	4	1	7	18
19	2	3	10	17
21	15	12	13	23

Nota. ¿Puede construirse un cuadrado similar de 6×6 casillas con los números del 1 al 36? No se sabe.

41. Descifrar la siguiente división:

$$
\begin{array}{rcccccc|ccccc}
* & * & * & * & A & * & * & * & A & * & \\
* & * & A & A & & & & & * & * & A & * \\
\cline{1-4}\cline{8-11}
 & * & * & * & A & & & & & & & \\
 & & * & * & A & & & & & & & \\
 & \cline{2-5} & * & * & * & * & & & & & & \\
 & & * & A & * & * & & & & & & \\
 & & \cline{3-6} & & * & * & * & * & & & & \\
 & & & & * & * & * & * & & & & \\
 & & & & \cline{5-6} & & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

Solución.

Una manera de resolverlo es *probando* para distintos valores de A, suponiendo que ninguno de los asteriscos que aparecen pueden tomar el valor de A.

Si probamos con $A = 0$, entonces la primera parte de la división queda como

$$\begin{array}{cccccccc|ccc} * & * & * & * & 0 & * & * & * & 0 & \alpha \\ * & * & 0 & 0 & & & & & \beta & \end{array}$$

Por tanto, $\alpha\beta$ es un número que acaba en 0, y α y β no pueden ser 0. Por ejemplo, podría ser $\alpha = 2$ y $\beta = 5$. En esta situación tendríamos

$$(*02) \times 5 = **10$$

que, como se ve, no acaba en 00. Del mismo modo descartamos cualquier otra posibilidad de valores para α y β.

Ahora probamos con $A = 1$. En este caso el primer paso de la división es

$$\begin{array}{cccccccc|ccc} * & * & * & * & 1 & * & * & * & 1 & \alpha \\ * & * & 1 & 1 & & & & & \beta & \end{array}$$

y $\alpha\beta$ debe acabar en 1, siendo α y β distintos de 1. Por ejemplo, podría ser $\alpha = 3$ y $\beta = 7$, pero entonces

$$(*13) \times 7 = **91,$$

que no acaba en 11. Con el mismo razonamiento se descartan otros posibles valores de α y β

Si seguimos probando en el primer paso de la división solo encontramos 4 casos en los que el producto de las cifras de divisor y cociente acaban en AA. Estos 4 casos son:

1. $A = 3$, $\alpha = 7$, $\beta = 9$.
2. $A = 4$, $\alpha = 3$, $\beta = 8$.
3. $A = 4$, $\alpha = 8$, $\beta = 3$.
4. $A = 8$, $\alpha = 4$, $\beta = 7$.

1 Caso 1

Una vez visto que el primer paso de la división se ajusta al patrón que nos plantean, procedemos con el segundo paso, para determinar la segunda cifra del cociente.

$$\begin{array}{cccccccc|ccc} * & * & * & * & 3 & * & * & * & 3 & 7 \\ * & * & 3 & 3 & & & & & 9 & \gamma \\ \cline{1-4} & * & * & * & 3 & & & & & \end{array}$$

Se ve que 7γ debe terminar en 3. Pero entonces $\gamma = 9$ y $(*37) \times \gamma$ no solo acaba en 3, sino en 33, por lo que este caso queda descartado.

2 Caso 2

Si procedemos como en el caso 1, llegamos a

$$\begin{array}{cccccccc|ccc} * & * & * & * & 4 & * & * & * & 4 & 3 \\ * & * & 4 & 4 & & & & & 8 & \gamma \\ \cline{1-8} & & * & * & * & 4 & & & & \end{array}$$

Ahora 3γ acaba en 4 y, por tanto, $\gamma = 8$, lo que implica que $(*43) \times \gamma$ acaba en 44, cosa que no puede ser.

3 Caso 3

Siguiendo el mismo esquema anterior

$$\begin{array}{cccccccc|ccc} * & * & * & * & 4 & * & * & * & 4 & 8 \\ * & * & 4 & 4 & & & & & 3 & \gamma \\ \cline{1-8} & & * & * & * & 4 & & & & \end{array}$$

Debe ser que 8γ acabe en 4, pero con $\gamma \neq 3$, para evitar la aparición de 44. Entonces $\gamma = 8$ y por tanto tenemos

$$\begin{array}{cccccccc|ccc} * & * & * & * & 4 & * & * & * & 4 & 8 \\ * & * & 4 & 4 & & & & & 3 & 8 \\ \cline{1-8} & & * & * & * & 4 & & & & \\ & & & * & * & 4 & & & & \end{array}$$

Ahora bien, el producto $(*48) \times 8$ tiene que ser un número de tres cifras, algo que es imposible y, por lo tanto, este caso también queda descartado.

4 Caso 4

Si tratamos de determinar la segunda cifra del cociente resulta

$$\begin{array}{cccccccc|ccc} * & * & * & * & 8 & * & * & * & 4 & 4 \\ * & * & 8 & 8 & & & & & 7 & \gamma \\ \cline{1-8} & & * & * & * & 8 & & & & \end{array}$$

y deducimos que $\gamma = 2$. Pasamos a la siguiente etapa de la división

$$\begin{array}{cccccccc|ccc} * & * & * & * & 8 & * & * & * & \delta & 8 & 4 \\ * & * & 8 & 8 & & & & & 7 & 2 \\ \cline{1-8} & & * & * & * & 8 & & & & \\ & & & * & * & 8 & & & & \end{array}$$

De aquí se deduce que la primera cifra del cociente (δ) debe ser un número menor o igual que 4, ya que de otra manera ($\delta 84$) $\times 2$ no sería un número de tres cifras. Si vamos a la siguiente etapa de la división, nos encontramos con

$$\begin{array}{cccccccc|ccc}
* & * & * & * & 8 & * & * & \delta & 8 & 4 \\
\cline{8-10}
* & * & 8 & 8 & & & & 7 & 2 & 8 \\
\cline{1-4}
 & * & * & * & 8 & & & & & \\
 & & * & * & 8 & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & * & * & * & * & & & & \\
 & & * & 8 & * & * & & & &
\end{array}$$

El número que aparece en la última línea $**8*$ es el producto de $\delta 84$ y 8. Por tanto

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 8 \\
\times & \delta & 8 & 4 \\
\hline
 & & 3 & 2 \\
 & 6 & 4 & \\
* & * & & \\
\hline
* & 8 & 7 & 2
\end{array}$$

Por tanto δ es un número menor o igual que 4 que multiplicado por 8 acaba en 2. Así $\delta = 4$ y, el divisor queda completamente determinado, faltando determinar el cociente.

En este paso, procedemos parecido a como lo hemos hecho en el paso anterior

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 4 & 8 & 4 & \\
 & \times & & 7 & 2 & 8 & \epsilon & \\
\hline
 & & * & * & * & * & * & \\
 & & 3 & 8 & 7 & 2 & & \\
 & & 9 & 6 & 8 & & & \\
3 & 3 & 8 & 8 & & & & \\
\hline
* & * & * & * & 8 & * & * &
\end{array}$$

Ahora probamos los posibles valores de ϵ con el objeto de que las cifras de la tercera columna sumen 8. Esto solo sucede si $\epsilon = 9$. En ese caso, el problema queda resuelto y se tiene que:

- Dividendo: 3527876
- Divisor: 484
- Cociente: 7289

$$\begin{array}{ccccccc|ccccc}
3 & 5 & 2 & 7 & \boxed{8} & 7 & 6 & 4 & \boxed{8} & 4 & \\
\cline{8-11}
3 & 3 & \boxed{8} & \boxed{8} & & & & 7 & 2 & \boxed{8} & 9 \\
\cline{1-4}
 & 1 & 3 & 9 & \boxed{8} & & & & & & \\
 & & 9 & 6 & \boxed{8} & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & 4 & 3 & 0 & 7 & & & & & \\
 & & 3 & \boxed{8} & 7 & 2 & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & 4 & 3 & 5 & 6 & & & & \\
 & & & 4 & 3 & 5 & 6 & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & &
\end{array}$$

42. Se observa un avión en vuelo desde cuatro estaciones de radar situadas en los vértices de un cuadrado plano en tierra de lado b. Las distancias al avión desde las cuatro estaciones, tomadas en orden alrededor del cuadrado, son R_1, R_2, R_3 y R_4. Prueba que $R_1^2 + R_3^2 = R_2^2 + R_4^2$. Prueba también que la altura de vuelo del avión es

$$h^2 = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2) - \frac{1}{8b^2}(R_1^4 + R_2^4 + R_3^4 + R_4^4 - 2R_1^2R_3^2 - 2R_2^2R_4^2).$$

Solución.

Eligiendo las diagonales del cuadrado como ejes de coordenadas en el plano del suelo, los cuatro vértices del cuadrado son los puntos de coordenadas $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm a)$, donde $a^2 = b^2/2$. Los numeramos, por ejemplo, en el sentido antihorario empezando por el vértice $(a, 0)$. Si el avión está a una altura vertical h por encima del punto (x, y), se tiene

$$\begin{aligned} R_1^2 &= (x-a)^2 + y^2 + h^2, & R_2^2 &= x^2 + (y-a)^2 + h^2, \\ R_3^2 &= (x+a)^2 + y^2 + h^2, & R_4^2 &= x^2 + (y+a)^2 + h^2, \end{aligned}$$

luego $R_1^2 + R_3^2 = R_2^2 + R_4^2$, y además

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 - 4a^2 - 4h^2 = 4(x^2 + y^2).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} R_1^4 + R_2^4 + R_3^4 + R_4^4 - 2R_1^2R_3^2 - 2R_2^2R_4^2 &= (R_3^2 - R_1^2)^2 + (R_4^2 - R_2^2)^2 \\ &= 16a^2(x^2 + y^2) \\ &= 4a^2(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 - 4a^2 - 4h^2), \end{aligned}$$

luego

$$16a^2h^2 = -16a^4 + 4a^2(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2) - (R_1^4 + R_2^4 + R_3^4 + R_4^4 - 2R_1^2R_3^2 - 2R_2^2R_4^2),$$

y dividiendo por $16a^2 = 8b^2$ se obtiene la segunda relación requerida.