31. Un bidón cilíndrico, con una masa en vacío M, contiene una masa m_0 de aceite cuando está lleno. El centro de masas (o de gravedad, o baricentro) del bidón lleno está en el punto medio central. Al empezar a vaciar el bidón el centro de masas baja, pero cuando el bidón está vacío, el centro de masas ha vuelto a subir al punto medio central. ¿Qué masa de aceite hay en el bidón cuando el centro de masas alcanza su punto más bajo?

Solución.

Sea m la masa de aceite que hay en el bidón en un cierto momento. Sean H la altura del bidón, h la altura que alcanza el aceite y $m_0/H = d$ la *densidad lineal* del aceite en el bidón, que suponemos constante.

La posición del baricentro cuando hay una cierta masa m de aceite es:

$$c(m) = \frac{M \cdot \frac{H}{2} + m \cdot \frac{h}{2}}{M+m} = \frac{M \cdot \frac{m_0}{2d} + \frac{m^2}{2d}}{M+m} = \frac{Mm_0 + m^2}{2d(M+m)}.$$

La derivada de la función $c(m)$ respecto de m es

$$c'(m) = \frac{2m(M+m) - (Mm_0 + m^2)}{2d(M+m)^2} = \frac{m^2 + 2Mm - Mm_0}{2d(M+m)^2}.$$

Para buscar la posición mínima, resolvemos $c'(m) = 0$, lo que plantea la siguiente ecuación en la incógnita m:

$$m^2 + 2Mm - Mm_0 = 0,$$

de soluciones

$$m = -M \pm \sqrt{M(M+m_0)}.$$

La única admisible es la solución positiva, que es la respuesta a la pregunta del enunciado:

$$m = \sqrt{M(M+m_0)} - M.$$

Observación. La masa total $M + m$ en ese momento es la media geométrica de las masas del depósito lleno y vacío.

Podemos calcular también la posición más baja del baricentro. Se trata de calcular $c(m)$ cuando $m = \sqrt{M(M+m_0)} - M$:

$$\begin{aligned}
c(m) &= \frac{Mm_0 + \left(\sqrt{M(M+m_0)} - M\right)^2}{2d\sqrt{M(M+m_0)}} \\
&= \frac{Mm_0 + M^2 + Mm_0 - 2M\sqrt{M(M+m_0)} + M^2}{2d\sqrt{M(M+m_0)}} \\
&= \frac{M^2 + Mm_0 - M\sqrt{M(M+m_0)}}{d\sqrt{M(M+m_0)}} \\
&= \frac{M(M+m_0) - M\sqrt{M(M+m_0)}}{d\sqrt{M(M+m_0)}} \\
&= \frac{\sqrt{M(M+m_0)} - M}{d}.
\end{aligned}$$

Por cierto, que este valor es igual a $\frac{m}{d} = h$ y por tanto, el baricentro en ese momento está justo sobre la superficie del aceite.

32. Sea n un entero positivo dado. ¿Cuántas soluciones en pares ordenados (x, y) de enteros positivos tiene la ecuación
$$\frac{xy}{x+y} = n\ ?$$

Solución. La ecuación dada es equivalente a: $(x-n)(y-n) = n^2$. (1)

Evidentemente, o se cumple a la vez $x > n$ e $y > n$, o $x < n$ e $y < n$. Pero no hay soluciones verificando $0 < x < n$, $0 < y < n$ porque entonces

$$|x-n| \cdot |y-n| < n \cdot n = n^2.$$

Por lo tanto sólo tenemos que buscar soluciones enteras de (1) con $x - n > 0$, $y - n > 0$. Es claro que hay tantas soluciones como factorizaciones ordenadas de n^2 en dos factores.

Si la descomposición de n en factores primos es $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, entonces

$$n^2 = p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \cdots p_k^{2a_k},$$

y el número de factorizaciones ordenadas de n^2 en dos factores es igual al número de divisores de n^2, es decir,

$$(2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \cdots (2a_k + 1).$$

33. Sea $a(n)$ el número de representaciones del entero positivo n como suma de unos y doses teniendo en cuenta el orden. Por ejemplo, $a(4) = 5$ porque

$$4 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Sea $b(n)$ el número de representaciones del entero positivo n como suma de enteros mayores que 1, nuevamente teniendo en cuenta el orden y contando la representación de único sumando n. Por ejemplo, $b(6) = 5$, ya que

$$6 = 4 + 2 = 2 + 4 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2.$$

Probar que, para todo n, $a(n) = b(n + 2)$.

Solución.

Se puede establecer una correspondencia biyectiva entre las representaciones ordenadas del entero positivo n como suma de unos y doses y las representaciones ordenadas de $n+2$ como suma de enteros mayores que 1 como sigue:

Las representaciones ordenadas del entero positivo n como suma de unos y doses están en obvia correspondencia inyectiva con las representaciones ordenadas de $n + 2$ como suma de unos y doses que acaban en un 2 (y tienen un sumando más). Si en esta última representación agrupamos en un paréntesis cada 2 con la cadena más larga de unos que lo preceden, obtenemos una representación de $n+2$ como suma ordenada de enteros mayores que 1. Recíprocamente, en una representación de $n + 2$ como suma ordenada de enteros mayores que 1 podemos reemplazar cada sumando por una cadena de unos seguidos de un 2.

Por ejemplo, la siguiente representación de 9 como suma ordenada de unos y doses

$$9 = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1$$

que corresponde a la representación de $11 (= 9 + 2)$

$$11 = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2,$$

se corresponde con

$$11 = (1 + 1 + 2) + (2) + (2) + (1 + 2) = 4 + 2 + 2 + 3,$$

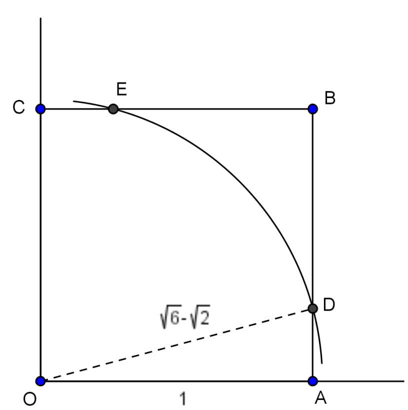
y también recíprocamente.

Se sigue que $b(n + 2) = a(n)$.

34. Prueba que dados tres puntos en el interior de un cuadrado de lado 1, hay al menos dos de ellos a menos de $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ unidades de distancia.

Solución.

Si tres puntos están en un cuadrado cerrado (es decir, pudiendo estar en el perímetro), se los puede trasladar simultáneamente de modo que uno de ellos coincida con un vértice del cuadrado y los otros dos queden dentro del cuadrado. (Ya que hay un rectángulo mínimo R (posiblemente degenerado) que contiene a los puntos dados y tiene sus lados paralelos a los lados del cuadrado. Cada lado de R contiene al menos uno de los puntos dados, así que uno de los puntos dados debe pertenecer a dos lados de R, es decir, es un vértice de R. Entonces se puede trasladar el rectángulo R por el interior del cuadrado hasta que ese vértice de R coincida con un vértice del cuadrado). La traslación no afecta a las distancias mutuas entre los tres puntos, de modo que podemos suponer que uno de los tres puntos es el punto O del cuadrado $OABC$ de la figura. Elegimos un sistema de ejes como se muestra.



Supongamos que los tres puntos O, P y Q del cuadrado cerrado estén todos separados por distancias mayores que $a = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Entonces P y Q estarán fuera del círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$. La circunferencia corta a AB en $D = (1, \sqrt{a^2 - 1})$ y a BC en $D = (\sqrt{a^2 - 1}, 1)$. Como

P y Q están, en particular, dentro del triángulo rectángulo DBE, no pueden estar más separados que los puntos D y E. Pero

$$\begin{aligned} DE^2 &= 2(1-\sqrt{a^2-1}\,)^2 \\ &= 2(1-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\,)^2 = 2(1-(2-\sqrt{3}\,))^2 \\ &= 2(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{6}-\sqrt{2}\,)^2 = a^2. \end{aligned}$$

Así que $PQ \le a$, contradicción. Esto prueba que, de tres puntos en un cuadrado cerrado de lado 1, habrá dos a una distancia no mayor que a.

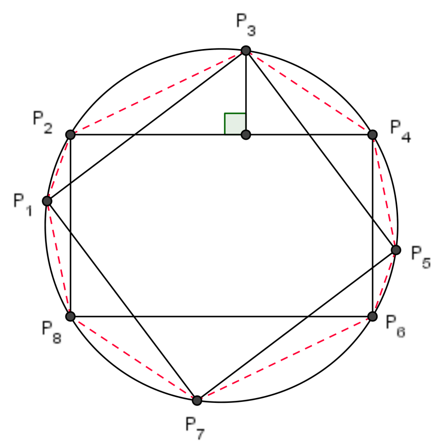
Si tenemos tres puntos en el interior de un cuadrado de lado 1, los puntos estarán en un cuadrado cerrado de lado $s < 1$, y por consiguiente habrá dos de ellos a una distancia menor o igual que as, y como $as < a$, a una distancia menor que a, como queríamos probar.

35. El octógono $P_1P_2\dots P_8$ está inscrito en un círculo, con sus vértices en ese orden a lo largo de la circunferencia. Suponiendo que el polígono $P_1P_3P_5P_7$ es un cuadrado de área 5 y que el polígono $P_2P_4P_6P_8$ es un rectángulo de área 4, halla el máximo valor posible del área del octógono.

Solución.

El área máxima es $3\sqrt{5}$. Del valor del área del cuadrado $P_1P_3P_5P_7$ deducimos que el radio del círculo es $\sqrt{5/2}$. Si $s > t$ son los lados del rectángulo $P_2P_4P_6P_8$, se sigue que $s^2+t^2 = 10$ y $st = 4$, de donde $(s+t)^2 = 18$ y $(s-t)^2 = 2$, luego $s+t = 3\sqrt{2}$, $s-t = \sqrt{2}$, y así $s = 2\sqrt{2}$ y $t = \sqrt{2}$.

No perdemos generalidad suponiendo que $P_2P_4 = 2\sqrt{2}$ y $P_4P_6 = \sqrt{2}$.



Denotemos por $[Q_1Q_2\dots Q_n]$ el área del polígono $Q_1Q_2\dots Q_n$. Por simetría, el área del octógono se puede expresar como

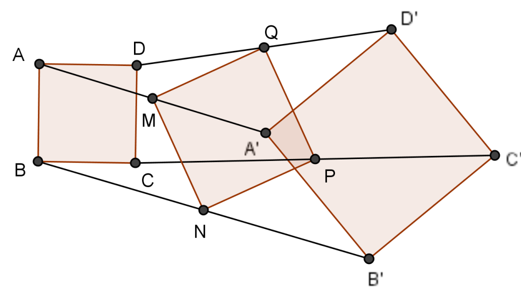
$$[P_2P_4P_6P_8] + 2[P_2P_3P_4] + 2[P_4P_5P_6].$$

El área $[P_2P_3P_4]$ es igual a $\sqrt{2}$ multiplicado por la distancia de P_3 a P_2P_4, y será máxima cuando P_3 sea el punto medio del arco P_2P_4. Análogamente, $[P_4P_5P_6]$ es igual a $\sqrt{2}/2$

multiplicado por la distancia de P_5 a P_4P_6, y será máxima cuando P_5 sea el punto medio del arco P_4P_6.

Así que el área del octógono se maximiza cuando P_3 es el punto medio del arco P_2P_4 y P_5 el punto medio del arco P_4P_6 (en cuyo caso $P_1P_3P_5P_7$ es evidentemente un cuadrado). En este caso, la distancia de P_3 a P_2P_4 es igual al radio del círculo menos la mitad de P_4P_6, luego $[P_2P_3P_4] = \sqrt{5} - 1$. De modo similar, $[P_4P_5P_6] = \sqrt{5}/2 - 1$, luego el área del octógono es $3\sqrt{5}$.

36. $ABCD$ es un cuadrado en el plano. $A'B'C'D'$ es otro cuadrado en el plano, recorrido en el mismo sentido. Los puntos M, N, P y Q son los puntos medios de AA', BB', CC' y DD', respectivamente. Parece que $MNPQ$ es otro cuadrado. ¿Lo es de verdad? ¿Por qué?



Solución.

Basta probar (notación de la figura) que el triángulo MNQ es isósceles y rectángulo en el vértice M. Para ello supongamos la figura en el plano complejo, y que los afijos de los puntos A, B, D, A', B' y D' son, respectivamente, los números complejos a, b, d, a', b' y d'. Como los triángulos ABD y $A'B'D'$ son isósceles y rectángulos en los vértices A y A' respectivamente, se tiene

$$d - a = (b - a)i, \qquad d' - a' = (b' - a')i,$$

donde i es la unidad imaginaria (la multiplicación por i supone un giro de $+90°$ en torno al origen).

Sumando las igualdades anteriores y dividiendo por 2, se obtiene

$$\frac{d + d'}{2} - \frac{a + a'}{2} = \left(\frac{b + b'}{2} - \frac{a + a'}{2}\right) i.$$

Pero los números complejos $\frac{a+a'}{2}$, $\frac{b+b'}{2}$ y $\frac{d+d'}{2}$ son los afijos de los puntos medios M, N y Q, y la igualdad anterior es la condición necesaria y suficiente para que el triángulo MNQ sea isósceles y rectángulo en el vértice M.