Seminario de problemas-ESO. Curso 2011-12. Hoja 5

25. En el sótano de un castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 720 llaves.

Solución.

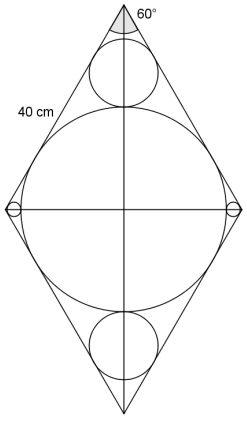
En total hay 144 cerraduras. Entre todos los gnomos deben tener al menos 5 llaves de cada cerradura, ya que si de alguna cerradura tuviesen a lo sumo 4 llaves, habría al menos 3 gnomos que no tendrían la llave para abrirla, y por lo tanto estos 3 gnomos no podrían llegar al tesoro; contra lo supuesto. Por lo tanto, el número mínimo de llaves que tienen los gnomos es $144 \cdot 5 = 720$.

26. Dado el siguiente cuadro numérico: $\begin{pmatrix} 11 & 17 & 25 & 19 & 16 \\ 24 & 10 & 13 & 15 & 3 \\ 12 & 5 & 14 & 2 & 18 \\ 23 & 4 & 1 & 8 & 22 \\ 6 & 20 & 7 & 21 & 9 \end{pmatrix}$, tienes que elegir cinco de sus elementos, sin que haya dos en una misma fila ni en una misma columna, de modo que el mínimo de esos cinco elementos que has elegido sea tan grande como sea posible, y además probar que tu elección es inmejorable.

Solución.

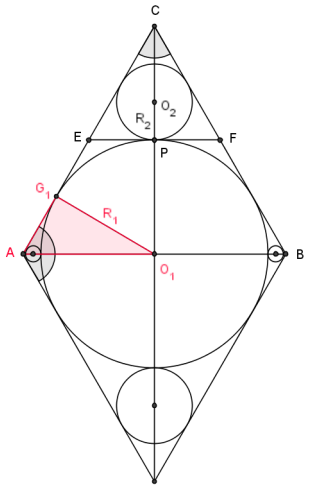
Como el conjunto de los elementos del borde del cuadro es la unión de dos filas y dos columnas, podremos elegir como máximo cuatro elementos del borde, y deberemos elegir al menos un elemento del subcuadrado 3×3 central. Como el mayor elemento de este subcuadrado central es 15, no hay ninguna elección admisible de cinco elementos para la que el mínimo elemento sea mayor que 15. La elección 25, 15, 18, 23, 20 satisface las condiciones y su mínimo elemento es 15. Se comprueba fácilmente, por otra parte, que esta es la única elección de cinco elementos con mínimo componente igual a 15.

27. Los ángulos agudos de un rombo miden 60° y el lado 40 cm. En el interior del rombo se inscriben cinco circunferencias del modo que se ve en la figura. Calcula sus radios.



Solución.

Usaremos la notación que aparece en la figura siguiente:



Notemos en primer lugar que el triángulo ABC es equilátero, ya que sus tres ángulos son iguales, con lo que $AB = AC = BC = 40$ cm.

Vamos a calcular primero el radio R_1 de la circunferencia inscrita en el rombo, con centro en el punto O_1 de intersección de las diagonales del rombo. Para ello nos podemos fijar en el $\triangle AO_1G_1$, donde G_1 es el punto de tangencia de esta circunferencia con el lado AC del rombo. En este triángulo se tiene que $\angle A = 60°$ y $\angle G_1 = 90°$, con lo cual, $\angle O_1 = 30°$ y de aquí, como $AO_1 = 20$ cm, se deduce que $AG_1 = 10$ cm y, por el teorema de Pitágoras,

$$R_1 = O_1G_1 = \sqrt{400 - 100} = 10\sqrt{3} \cong 17.32 \text{ cm}.$$

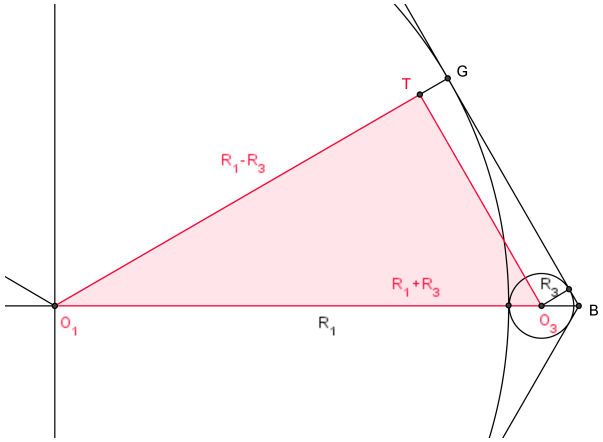
Calculemos ahora el radio R_2 de la circunferencia mediana de centro O_2: la altura del triángulo ABC es $CO_1 = 20\sqrt{3}$, de modo que

$$CP = CO_1 - R_1 = 10\sqrt{3} = \frac{1}{2}\, CO_1\,,$$

por lo tanto (el triángulo equilátero EFC tiene lado 20 cm, y el inradio es un tercio de la altura)

$$R_2 = \frac{1}{3}\, CP = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cong 5.77 \text{ cm}.$$

Finalmente calculamos el radio R_3 de las circunferencias pequeñas. Usaremos la notación de la figura siguiente, que es un detalle de la figura completa.



De la semejanza de los triángulos O_1GB y O_1TO_3 se sigue

$$\frac{R_1+R_3}{R_1-R_3}=\frac{20}{R_1}\quad\Longrightarrow\quad\frac{R_1}{R_3}=\frac{20+R_1}{20-R_1}\,,$$

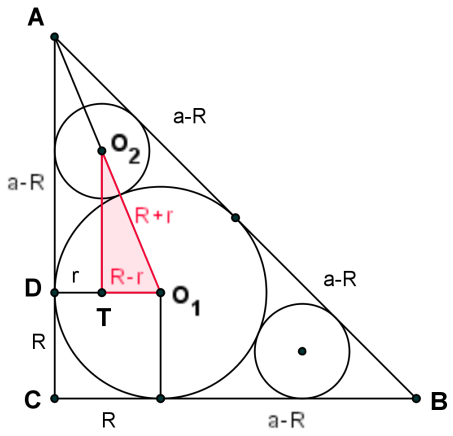
por lo tanto

$$R_3=R_1\,\frac{20-R_1}{20+R_1}=10\sqrt{3}\,\frac{20-10\sqrt{3}}{20+10\sqrt{3}}=10\sqrt{3}\,(2-\sqrt{3})^2=70\sqrt{3}-120\cong 1.24\text{ cm}.$$

28. En un triángulo rectángulo e isósceles se dibujan la circunferencia inscrita y dos circunferencias iguales, tangentes exteriormente a la circunferencia inscrita y tangentes además a la hipotenusa y a un cateto. Calcular la razón entre los radios de las circunferencias distintas.

Solución.

Usaremos la notación que aparece en la figura siguiente. En particular, R y r indicarán respectivamente los radios de la circunferencia inscrita en el triángulo y de cada una una de las circunferencias pequeñas.



Llamando a a la longitud del cateto, vemos fácilmente que se cumple $2(a-R)=a\sqrt{2}$, de donde resulta $\frac{a}{R}=2+\sqrt{2}$.

De la semejanza de los triángulos O_1O_2T y O_1AD y se sigue

$$\frac{R+r}{R-r} = \frac{\sqrt{R^2+(a-R)^2}}{R} = \frac{\sqrt{2R^2-2aR+a^2}}{R},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{R}{r} &= \frac{\sqrt{2R^2-2aR+a^2}+R}{\sqrt{2R^2-2aR+a^2}-R} \\
&= \frac{(\sqrt{2R^2-2aR+a^2}+R)^2}{(a-R)^2} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2-2\frac{a}{R}+\left(\frac{a}{R}\right)^2}+1}{\frac{a}{R}-1}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 \cong 2.24.
\end{aligned}$$

29. Se informa a 30 presos de que se les va a colocar formando una fila y se les va a poner un sombrero en la cabeza a cada uno, blanco o negro, sin especificar cuántos gorros se pondrán de cada color (pueden ser 29 blancos y uno negro, 15 y 15, 17 y 13...). Cada preso sólo verá los sombreros de los prisioneros que tiene delante pero no el suyo ni los de detrás. Un guardia irá preguntando sucesivamente a cada uno de los presos desde el último (el que ve todos pero no el suyo) al primero (que no ve ninguno) de qué color es su sombrero. Los presos sólo pueden contestar blanco o negro: si aciertan son liberados y si no, son ejecutados. Todos los presos pueden escuchar las respuestas anteriores a las suyas.

Antes de llevar esto a cabo, los presos, que conocen la prueba a la que van a ser sometidos pero no naturalmente de qué color serán sus sombreros, tienen un tiempo para hablar entre ellos y pensar una estrategia de grupo. ¿Cuál es la mejor estrategia para salvar SEGURO al mayor número de prisioneros? ¿Cuántos se salvan seguro con esa estrategia?

Solución.

Hay una estrategia para salvar seguro a 29 presos. El primer preso al que pregunten, el que ve todos los sombreros menos el suyo, debe contar cuantos sobreros blancos hay (también podría hacerse con los sombreros negros, es indiferente). Si hay un número par de sombreros blancos contestará blanco (sería como si contestase par). Y si hay un número impar de sombreros blancos contestará negro (sería como si contestase impar). Como él ha contestado en función de los sombreros que ha visto sin poder ver el suyo y sin ninguna pista, la probabilidad de que se salve es del 50%.

El siguiente preso al que le pregunten contará de nuevo el número de sombreros blancos. Si ve un número par de sombreros blancos y el anterior preso dijo blanco (par) quiere decir que su sombrero es negro, así que diciendo negro se salvará; sin embargo si ve un número par y el anterior dijo negro (impar), entonces su sombrero es blanco y diciendo blanco se salvará. De igual forma debe actuar si al contar los sombreros que ve este segundo preso

hay un número impar de sombreros blancos. En este caso deberá decir negro si el anterior dijo negro (impar) y deberá decir blanco si el anterior dijo blanco (par).

El resto de presos deberá actuar de forma equivalente, sabiendo gracias a la respuesta del primer preso si el número de sombreros blancos es par o impar y teniendo en cuenta el color de los sombreros de los presos que les preceden (que aunque no los vean lo saben porque oyen las respuestas siempre acertadas de los presos anteriores). De esta forma 29 presos se salvarán seguro y uno (el primero que habla) tiene un 50% de probabilidad de salvarse.

30. (a) Se tienen dos cubos de 3 y 5 litros de capacidad. Se tiene mucha agua a disposición y cuando vertemos un cubo en otro asumimos que no se derrama ni una gota de agua. ¿Cómo obtener exactamente 4 litros de agua?

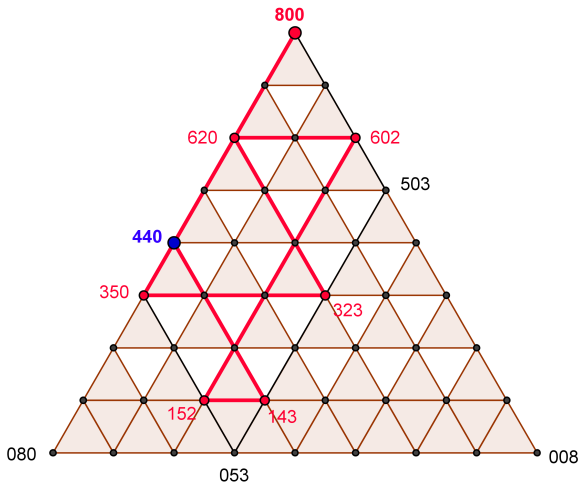
Solución parte (a).

Primero se llena el cubo de tres litros y se vacía en el cubo de cinco litros; después se llena otra vez el de tres litros y se acaba de llenar con él el cubo de cinco litros, de modo que ahora queda un litro en el cubo de tres litros. Se desecha toda el agua del cubo de cinco litros, se vierte el litro en el cubo de cinco litros, se vuelve a llenar el cubo de tres litros y se añade su contenido al cubo de cinco litros, que queda entonces con cuatro litros exactamente.

(b) Ahora se tienen tres cubos, uno de 8 litros lleno de agua y dos vacíos, de 3 y 5 litros de capacidad, y no hay más agua a disposición. ¿Cómo repartir los 8 litros en dos partes iguales de 4 litros?

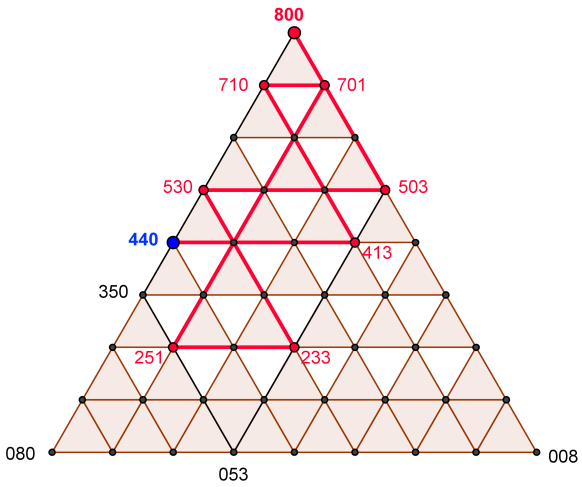
Solución parte (b).

Hay dos maneras de hacerlo que se esquematizan en los diagramas siguientes. Las coordenadas de los puntos registran los contenidos de agua en los cubos de 8, 5 y 3 litros, respectivamente.



En esta primera posibilidad, hay siete operaciones sucesivas:

$$800,\ 350,\ 323,\ 620,\ 602,\ 152,\ 143,\ 440.$$



En esta segunda posibilidad, hay ocho operaciones sucesivas:

$$800,\ 503,\ 530,\ 233,\ 251,\ 701,\ 710,\ 413,\ 440.$$