Seminario de problemas-Bachillerato. Curso 2011-12. Hoja 4

19. En el parlamento de Sikinia cada miembro tiene a lo sumo tres enemigos entre los restantes miembros. Probar que se puede dividir el parlamento en dos salas de manera que cada miembro tenga a los sumo un enemigo en su sala.

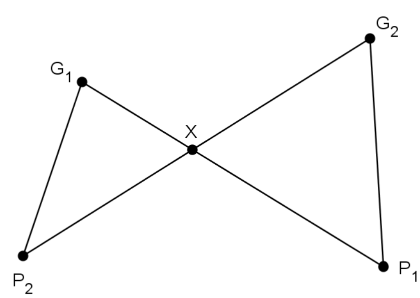
Solución.

Consideremos todas las posibles particiones del parlamento en dos salas. Para cada partición calculamos la suma total E del número de enemigos que tiene cada miembro en su sala. La partición con E mínimo tiene la propiedad requerida. En efecto, si algún miembro tuviese al menos dos enemigos en su sala, entonces tendrá un enemigo a lo sumo en la otra sala. Si cambiamos a esta persona de sala disminuiríamos E, lo cual es una contradicción.

20. Se dan $2n$ puntos en el plano sin que haya tres que estén alineados. Exactamente n de estos puntos son granjas. Los restantes n puntos son pozos. A cada granja le asignamos un pozo y los unimos mediante un camino en línea recta. Demostrar que se pueden construir estos caminos de forma que no se intersequen.

Solución.

Entre las $n!$ redes de carreteras, elegimos aquella con menor distancia total, es decir, que la suma de las distancias de los caminos sea mínima. Veamos que en esta red de caminos no hay dos que se crucen. En efecto, supongamos que los caminos G_1P_1 y G_2P_2 se intersecan (ver figura) en el punto X, donde G_1 y G_2 son granjas y P_1 y P_2 pozos. Como no hay tres puntos alineados, los triángulos $\triangle G_1XP_2$ y $\triangle G_2XP_1$ son no degenerados y por tanto $G_1P_1+G_2P_2 = G_1X+XP_1+G_2X+XP_2 > G_1P_2+G_2P_1$. Por tanto, si sustituimos G_1P_1 y G_2P_2 por G_1P_2 y G_2P_1, la distancia total disminuye. Contradicción.



Nota. Este problema, que se denomina *el problema de Sylvester*, fue propuesto por Sylvester en 1893. T.Gallai lo resolvió en 1933 de una forma muy complicada, mientras que L.M.Kelly lo resolvió en 1948 usando la solución que hemos presentado.

21. Sean a, b, c y S, respectivamente, las longitudes de los lados y el área de un triángulo acutángulo ABC. Demuestra que P es un punto interior del triángulo ABC tal que

$$a\,PA + b\,PB + c\,PC = 4S,$$

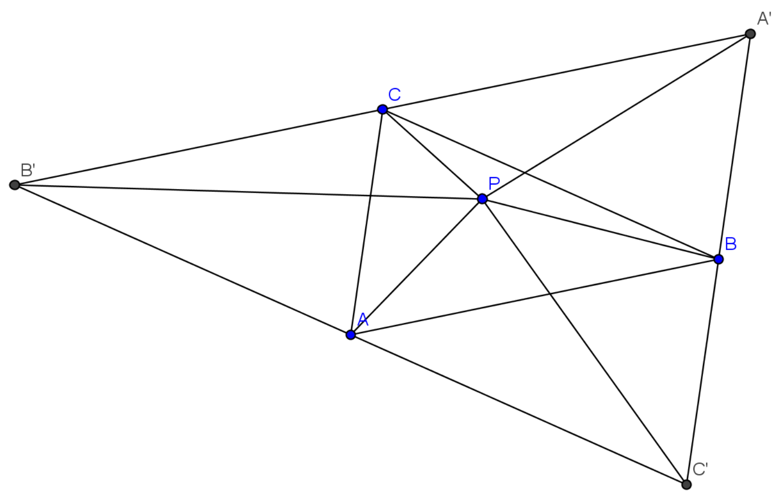
si y sólo si P es el ortocentro del triángulo ABC.

Solución.

Trazamos por A, B y C rectas paralelas a los lados opuestos respectivos del triángulo ABC; estas rectas determinan el triángulo $A'B'C'$ cuyos vértices son los puntos de intersección de las rectas trazadas. Entonces los triángulos ABC, BAC', $A'CB$, $CB'A$ son equivalentes; es decir, tienen lados respectivamente iguales y, por tanto, iguales áreas. Se tiene, además,

$$\begin{aligned} 4[ABC] &= [ABC] + [BAC'] + [A'CB] + [CB'A] = [A'B'P] + [A'C'P] + [B'C'P] \\ &= c\,h(P, A'B') + b\,h(P, A'C') + a\,h(P, B'C') \leq c\,PC + b\,PB + \ a\,PA \end{aligned}$$

y la igualdad se cumple en la última desigualdad si y sólo si P es el ortocentro del triángulo ABC.



Nota. Si P es el ortocentro, es fácil probar que se cumple la igualdad que piden demostrar.

22. Prueba que todo número entre 1 y $n!$ ($n \geq 1$ entero) puede ser escrito como suma de a lo sumo n divisores distintos de $n!$. Es decir, dado m tal que $1 \leq m \leq n!$, existen ℓ números $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$ distintos ($1 \leq \ell \leq n$) tales que $k_j \mid n!$ para todo $1 \leq j \leq \ell$ y

$$m = k_1 + k_2, \ldots + k_\ell.$$

Solución.

Es fácil comprobar que la afirmación es válida para $n = 1$. Supongamos que la afirmación es cierta para un cierto n, es decir, dado m, $1 \leq m \leq n!$, existen $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$, $\ell \leq n$, diferentes dos a dos, con k_j divisor de $n!$ tales que

$$m = k_1 + k_2, \ldots + k_\ell,$$

y comprobemos que se cumple para $n + 1$. Sea $m < (n + 1)!$. Entonces el algoritmo de Euclides para la división de m entre $n + 1$ asegura que existen q y r, $r \leq n \leq n!$ tales que $m = (n + 1)q + r$. Como $m < (n + 1)!$, se tiene que $q \leq n!$. Por hipótesis, existen $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$, distintos dos a dos, que dividen a $n!$, tales que

$$q = k_1 + k_2 + \ldots + k_\ell.$$

Por lo tanto,
$$m = (n+1)k_1 + (n+1)k_2 + \ldots + (n+1)k_\ell + r.$$
Los números $(n+1)k_1, (n+1)k_2, \ldots, (n+1)k_\ell, r$ dividen a $(n+1)!$ y son todos distintos.

23. Para cualquier conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de cuatro enteros positivos distintos, se denota la suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ por s_A. Sea n_A el número de pares (i,j) con $1 \leq i < j \leq 4$ para los cuales $a_i + a_j$ divide a s_A. Encontrar todos los conjuntos A de cuatro enteros positivos distintos para los cuales se alcanza el mayor valor posible de n_A.

Solución.

Veamos que los conjuntos A que satisfacen el enunciado son de la forma $\{\lambda, 5\lambda, 7\lambda, 11\lambda\}$ y $\{\lambda, 11\lambda, 19\lambda, 29\lambda\}$, para los cuales $n_A = 4$.

Supongamos que $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Vemos que para cada pareja de índices (i,j) con $1 \leq i < j \leq 4$, $a_i + a_j \mid s_A \Leftrightarrow a_i + a_j \mid a_k + a_l$, donde k, l son los otros dos índices. Está claro que hay $\binom{4}{2} = 6$ parejas distintas. Como $a_3 + a_4 > a_1 + a_2$ deducimos que $a_3 + a_4 \nmid a_1 + a_2$, luego la pareja $(3,4)$ no satisface la condición anterior. Del mismo modo la pareja $(2,4)$ tampoco la satisface. Por tanto $n_A \leq 4$.

Supongamos que $n_A = 4$. Entonces $a_1 + a_4 \mid a_2 + a_3$ y $a_2 + a_3 \mid a_1 + a_4$, luego $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$, o bien $a_2 = a_1 + d$, $a_4 = a_3 + d$, con $d > 0$. Como $a_1 + a_3 \mid a_2 + a_4$ y por lo anterior $a_2 + a_4 = a_1 + a_3 + 2d$, deducimos que $a_1 + a_3 \mid 2d$. Pero $a_3 > a_2 = a_1 + d > d$, luego $a_1 + a_3 = 2d$. Además, $a_1 + a_2 \mid a_3 + a_4$, es decir, $2a_1 + d \mid 5d - 2a_1 \Leftrightarrow 5d - 2a_1 = (2a_1 + d)n \Leftrightarrow (5-n)d = 2(n+1)a_1$, con $1 \leq n \leq 4$.

Para $n = 1$ obtenemos $d = a_1$, $a_3 = a_1$, contradicción.

Para $n = 2$ obtenemos $d = 2a_1$, $a_3 = 3a_1 = a_2$, contradicción.

Para $n = 3$ obtenemos $d = 4a_1$, $a_3 = 7a_1$, $a_2 = 5a_1$, $a_4 = 11a_1$.

Para $n = 4$ obtenemos $d = 10a_1$, $a_3 = 19a_1$, $a_2 = 11a_1$, $a_4 = 29a_1$.

Vemos que estas dos últimas soluciones funcionan.

24. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las raíces del polinomio $P(t) = t^n + t^{n-1} + \ldots + t + 1$. Hallar
$$\sigma = \frac{1}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_2} + \ldots + \frac{1}{1-a_n}.$$

Soluciones.

Se tiene que $\sigma = \frac{n}{2}$. Lo comprobamos de dos formas distintas. Una utilizando derivadas y otra con las fórmulas de Cardano-Vieta.

Solución 1.

Se tiene que $P(t) = \prod_j (t - a_j)$. Luego
$$P(1) = \prod_j (1 - a_j) = n+1, \quad P'(t) = nt^{n-1} + \ldots + 2t + 1 = \sum_j \prod_{i \neq j} (t - a_i),$$
$$P'(1) = n + (n-1) + \ldots + 1 = \sum_j \prod_{i \neq j} (1 - a_i).$$

Observar que

$$\sigma = \frac{\sum_j \prod_{i \neq j}(1-a_i)}{\prod_j (1-a_j)} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+1} = \frac{n}{2}$$

Solución 2.

Sin utilizar la derivada, calculemos $\sum_j \prod_{i \neq j}(1-a_i)$.

Observar que

$$P(1+t) = (1+t)^n + (1+t)^{n-1} + \ldots + (1+t) + 1 = \prod_j (1+t-a_j)$$

por las fórmulas de Cardano-Vieta; el coeficiente de t en $P(1+t)$ es $\sum_j \prod_{i \neq j}(1-a_i)$, y utilizando la fórmula del binomio de Newton este coeficiente es igual también a $n + (n-1) + \ldots + 1$.