Seminario de problemas. Curso 2011-12. Hoja 3

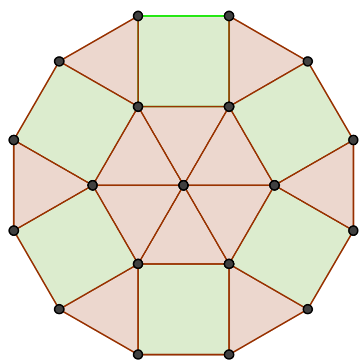
13. Tenemos un gran montón de cuadrados y de triángulos equiláteros del mismo lado. ¿Cuál es el polígono regular de mayor número de lados que se puede formar si vamos yuxtaponiendo cuadrados y triángulos sin que se solapen y haciendo que cada par de polígonos adyacentes compartan un lado completo?

Solución.

El mayor polígono regular construible así es el dodecágono, o sea, un polígono regular de doce lados.

El ángulo interior de un polígono regular de n lados es $180° - \frac{360°}{n}$. Pegando por un lado común un cuadrado y un triángulo equilátero se forman ángulos de 150° en los vértices comunes, de modo que

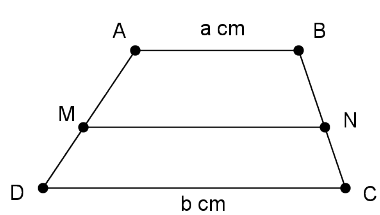
$$180° - \frac{360°}{n} = 150° \Leftrightarrow n = \frac{360°}{30°} = 12.$$



Observar que otras distribuciones de cuadrados y triángulos, o no son posibles, o llevan a polígonos regulares de menor número de lados.

14. El trapecio $ABCD$ se divide en dos trapecios de igual área trazando un segmento MN paralelo a las bases $AB = a$ y $CD = b$. ¿Cuánto mide el segmento MN?

Solución.



Denotemos por x la longitud MN. Si llamamos H a la altura del trapecio $ABCD$ y h a la altura del trapecio $ABNM$, se tiene por un lado que

$$\frac{(a+x)h}{2} = \frac{(b+x)(H-h)}{2},$$

y por otro

$$(a+x)h = \frac{(a+b)H}{2} \Rightarrow H = \frac{2h(a+x)}{a+b}.$$

Sustituyendo este valor de H en la primera igualdad, queda

$$\begin{aligned}(a+x)h &= \frac{(b+x)h(a-b+2x)}{a+b}\\ &\Leftrightarrow a^2+ab+x(a+b) = ab-b^2+2bx+ax-bx+2x^2\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.\end{aligned}$$

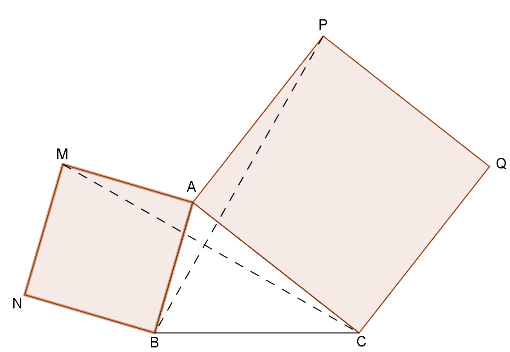
15. A cada una de tres personas se le coloca uno de cinco sombreros, de los cuales dos son rojos y tres blancos, y todas ellas conocen esta información. Las tres personas, con un sombrero en su cabeza, están dispuestas en fila de modo que cada una de ellas sólo puede ver a las que le anteceden y no su propio sombrero: la primera de la fila no puede ver ningún sombrero, la segunda sólo puede ver el sombrero de la primera, y la tercera los sombreros de las dos que la preceden. Se pregunta a la tercera cuál es el color de su sombrero y responde que no sabe. Se pregunta entonces lo mismo a la segunda y responde también que no sabe. Se hace finalmente la misma pregunta a la primera persona, y ésta acierta el color de su sombrero. ¿Qué ha respondido la primera persona y por qué?

Solución.

El color del sombrero que lleva la primera persona es blanco.

(Si la tercera no sabe de qué color es su sombrero es porque ve dos sombreros de color blanco o un sombrero rojo y otro blanco, porque si viese dos sombreros rojos, entonces podría haber dicho que su sombrero es blanco. Con esa información, la segunda, si tampoco puede saber cuál es el color de su sombrero, es porque está viendo un sombrero de color blanco.)

16. Sobre los lados AB y AC del triángulo $\triangle ABC$ se construyen, hacia el exterior del triángulo, los cuadrados $ABNM$ y $ACQP$. Demostrar que los segmentos MC y BP son iguales y perpendiculares.



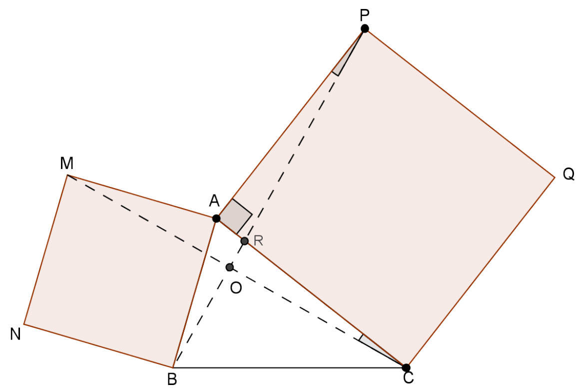
Solución.

Notar primero que los triángulos $\triangle AMC$ y $\triangle ABP$ son iguales, ya que

$$\begin{aligned}AM &= AB\\ AC &= AP\\ \angle MAC &= \angle BAP.\end{aligned}$$

En particular, de esta igualdad de triángulos se tiene que $MC = BP$.

Para probar la perpendicularidad, observamos ahora los triángulos $\triangle ARP$ y $\triangle ORC$, donde O es el punto de corte de MC y BP y R es la intersección de BP con el lado AC.



De la igualdad de $\triangle AMC$ y $\triangle ABP$, tenemos que $\angle APR = \angle RCO$, y además $\angle ARP = \angle ORC$, por ser opuestos por el vértice. De aquí se deduce que $\angle ROC = \angle PAR = 90°$.

17. Hallar un número de seis cifras, que comienza por 1 y cuyo triplo es el mismo número pero con el 1 cambiado de lugar al final. *Solución.*

El único número que satisface las condiciones del problema es 142857.

Hay dos maneras de llegar a la solución. Una utilizando la tabla del tres y otra utilizando representación en base diez:

$$\overline{1abcde} \times 3 = \overline{abcde1} \Leftrightarrow 7 \times \overline{abcde} = 299999$$

de donde sigue la solución.

18. Dos porteros de fútbol tienen que seleccionar sus equipos eligiendo entre 20 jugadores puestos en fila y escogiendo cada uno de los porteros alternativamente uno de los dos jugadores que se encuentran en el extremo de la fila. Los porteros conocen el número de goles que cada uno de los jugadores ha marcado en un torneo anterior y el objetivo de ambos es conseguir, si es posible, un equipo que haya marcado tantos goles o más que el otro.

1. Demostrar que el primero que elige tiene una estrategia para lograr su objetivo.
2. ¿Existe una estrategia análoga para el primero o para el segundo en elegir si tienen que escoger de una fila de 21 jugadores? (se entiende que en este caso uno de los 21 se quedará sin jugar).

Solución de 1.

Basta darse cuenta de que si enumeramos los 20 jugadores del 1 al 20 y de izquierda a derecha, es decir, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, el primero en elegir puede decidir si empieza por el jugador número 1 o por el jugador número 20. Es decir, tiene la opción de elegir un jugador en posición impar o un jugador en posición par.

La estrategia empieza por sumar el número de goles marcados en el torneo anterior por todos los jugadores que están en posición par por un lado y, por otro, hacer la suma de los que están en posición impar. Si la suma de los goles marcados por los que están en posición impar es mayor o igual que la de los pares (vamos a suponer que es así), el portero que elige en primer lugar puede intentar quedarse con todos los jugadores situados en una posición impar, empezando por elegir al jugador número 1.

En este caso, el portero que elige en segundo lugar está entonces obligado a elegir un jugador que se encuentra en posición par, ya que sólo puede elegir el 2 o el 20. Tanto si elige el 2 como si elige el 20, deja al portero que elige en primer lugar la posibilidad de elegir un jugador que se encuentra en posición impar, el 3 (si el segundo ha elegido el 2) o el 19 (si el segundo ha elegido el 20). En ambos casos, obliga al portero que elige en segundo lugar a elegir un jugador que está en posición par. Y así sucesivamente.

Es decir, si el portero que elige en primer lugar escoge el jugador número 1, automáticamente tiene la opción de elegir a todos los jugadores que están en posición impar y por tanto consigue su objetivo (recordemos que estamos suponiendo que la suma de los goles marcados por los que están en posición impar es mayor o igual que la de los que están en posición par).

Si la suma de los pares fuese mayor, el primer portero empezaría por elegir el 20, forzando al segundo a elegir un impar y así sucesivamente.

Solución de 2.

No hay estrategia posible que permita ganar siempre a uno de los dos. Para ello veamos dos casos en los que en uno gana claramente el primer portero en elegir y en otro puede ganar claramente el segundo.

Ejemplo número 1: Todos los jugadores marcaron en el torneo anterior 1 gol, menos el que está en primera posición que marcó 2:

2, 1 ,1 ,1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1

Claramente, el primero que elige escoge el jugador 1 y consigue el objetivo. Es decir, no hay estrategia posible para el que elige en segundo lugar.

Ejemplo número 2: Todos los jugadores marcaron en el torneo anterior 1 gol, menos el que está en posición 2 que marcó 2:

1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1

En este caso, el que elige en primer lugar está obligado a elegir el que está en posición 21 y ninguno de los dos escogerá el número 1, pues dejaría el mejor jugador en posición 2 libre para ser elegido por el portero contrario.

Pero aún así, el segundo elige el 20, el primero el 19, el segundo el 18, etc, y, por tanto, el número 2 será elegido por el segundo. Luego gana el segundo y el primero no tiene ninguna estrategia para ganar.