

- 115.** Determina los tres últimos dígitos de 7^{9999} .

Solución.

Observar que $7^4 = 2401$. Luego

$$7^{4n} = (2401)^n = (1 + 2400)^n.$$

Aplicando la fórmula del binomio de Newton se obtiene que

$$(1 + 2400)^n = 1 + n \cdot 2400 + \binom{n}{2}(2400)^2 + \dots.$$

De esta expresión es claro que después del segundo término todos los números terminan en al menos cuatro ceros. Luego los últimos tres dígitos de 7^{4n} están determinados por la expresión

$$1 + n \cdot 2400 = 24 \cdot n \cdot 100 + 1.$$

Sea m el último dígito de $24 \cdot n$. Entonces $1 + 2400 \cdot n$ terminará en $m01$. Tomemos un n adecuado para formar 9999. Claramente $9999 = 9996 + 3$, luego

$$7^{9999} = 7^{9996} \cdot 7^3.$$

Notemos que 9996 es un múltiplo de 4, $9996 = 4 \cdot 2499$. Por lo analizado anteriormente se deduce que $7^{9996} = 7^{4 \cdot 2499}$ termina en 601. Como 7^3 termina en 343, se obtiene que el número en cuestión debe terminar en 143.

- 116.** Dos jugadores, Antonio y Beatriz, juegan de la siguiente manera. Antonio colocará sobre la mesa un cierto número de palillos, entre 20 y 100, los que él quiera. Beatriz quitará de ese montón entre 1 y 10 palillos, los que ella quiera. Entonces Antonio quitará entre 1 y 10 palillos de los que hayan quedado, etc. Y ganará 20 euros quien se lleve el último palillo y deje la mesa vacía. ¿Alguno de los dos tiene una estrategia que le permite ganar siempre?

¿Y si el que juega puede quitar del montón solamente o bien uno o bien tres palillos?

Solución.

En la primera situación, cuando el que juega puede quitar entre 1 y 10 palillos de la mesa, Antonio tiene la estrategia ganadora de dejar en la mesa inicialmente un número de palillos que sea múltiplo de 11 (es decir, 22, 33, ..., 99 palillos) y después de cada jugada de Beatriz hacer la suya volviendo a dejar siempre un número de palillos que sea múltiplo de 11. Llegando al final, Antonio habrá dejado sobre la mesa 11 palillos y, quite los que quite Beatriz, él se llevará de la mesa el último palillo.

En la segunda situación, Antonio tiene la estrategia ganadora de dejar en la mesa inicialmente un número de palillos que sea múltiplo de 4. Cuando Beatriz quite un palillo, él contestará quitando tres; cuando Beatriz quite tres palillos, él contestará quitando uno; así Antonio va dejando siempre un número de palillos múltiplo de 4, y se llevará el último palillo.

117. Considerar la sucesión de números a_n , $n \in \mathbb{N}$, dada por

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Prueba que para cualquier número natural n , $a_n < 3$.

Solución.

Para cada n número natural se satisface la desigualdad $n! \geq 2^{n-1}$. Luego $1/n! \leq 1/2^{n-1}$. Entonces obtenemos que

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Puesto que la serie geométrica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

de razón $1/2$ posee suma igual a 2, se obtiene $a_n < 3$.

118. En un tablero cuadrículado de tamaño 19×19 , una ficha llamada *dragón* da saltos de la siguiente manera: en un salto se desplaza cuatro casillas consecutivas en una dirección paralela a uno de los lados del tablero y una casilla en dirección perpendicular a la anterior.

				X		X				
	X								X	
					D					

Desde D, el dragón puede saltar a una de las cuatro posiciones X.

Se sabe que, con este tipo de saltos, un dragón puede moverse de cualquier casilla del tablero a cualquier otra.

La *distancia dragoniana* entre dos casillas se define como el mínimo número de saltos que debe dar un dragón para moverse de una casilla a otra.

Sea C una de las cuatro casillas de las esquinas del tablero, y sea V la casilla vecina a la C que la toca en un único punto.

Demuestra que existe alguna casilla X del tablero tal que la distancia dragoniana de C a X es mayor que la distancia dragoniana de C a V .

Solución.

Basta un tablero 6×6 para mostrar que la trayectoria mínima que lleva un dragón de C a V es de 8 saltos:

