Seminario de problemas-ESO. Curso 2011-12. Hoja 20

109. Determina los números primos p para los que se cumple que $2^p + p^2$ es primo.

Solución.

Notemos que $p = 2$ y $p = 3$ producen los números 8 y 17, compuesto en el primer caso y primo en el segundo. Basta considerar entonces primos $p > 2$.

Consideremos congruencias módulo 3. Sabemos que p debe satisfacer una y sólo una de las congruencias siguientes:

$$p \equiv 0 \mod 3, \quad p \equiv 1 \mod 3, \quad p \equiv -1 \mod 3.$$

Claramente, el primer caso sólo se puede dar si $p = 3$, puesto que de otra manera p sería un número compuesto.

Aplicando las propiedades de congruencia en cualquiera de los dos casos restantes se obtiene que $p^2 \equiv 1 \mod 3$.

Por otro lado, como $2 \equiv -1 \mod 3$ se obtiene $2^p \equiv (-1)^p \mod 3$. Además p es impar, luego $2^p \equiv -1 \mod 3$.

En resumen, $2^p \equiv -1 \mod 3$ y $p^2 \equiv 1 \mod 3$. Aplicando las propiedades de las congruencias con respecto a la suma se obtiene finalmente que $(2^p + p^2) \equiv 0 \mod 3$. Pero entonces $(2^p + p^2)$ es siempre divisible por 3 si $p > 3$. Luego el único caso es $p = 3$.

110. Encuentra una expresión sin puntos suspensivos para la siguiente suma S_n:

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ unos}}.$$

Solución.

Podemos reescribir S_n como sigue:

$$S_n = 1 + (1 + 10) + (1 + 10 + 10^2) + \cdots + (1 + 10 + \cdots + 10^{n-1}).$$

Observar que dentro de cada paréntesis aparece la suma de los términos de una progresión geométrica, luego

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \cdots + \frac{10^n-1}{9} = \frac{1}{9}(10 + 10^2 + \cdots + 10^n - n) \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9} - n\right). \end{aligned}$$

Con algunos puntos suspensivos, este número es $\frac{1}{9}(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ unos}}0 - n)$.

111. Dos hermanos venden un rebaño de cabras, consiguiendo por cierto por cada cabra tantos euros como cabras había en el rebaño, y deciden repartirse equitativamente el dinero obtenido. El hermano mayor empieza "10 euros para mí, 10 euros para tí", y repite esta distribución unas cuantas veces más. Al final, cuando el mayor toma 10 euros para él,

resulta que quedan ya menos de 10 euros para el hermano pequeño. "No importa, —le dice, quédate con lo que queda, además yo te doy este llaverito que tanto te gustaba y que acabo de comprar y así estamos en paz". ¿Cuánto costaba el llaverito?

¿Podríamos saber cuánto costaba el llaverito si el hermano mayor hubiese organizado el reparto con la fórmula "7 euros para mí, 7 euros para tí"?

Solución.

Repartiendo con la fórmula "10 para mí, 10 para tí":

Si el número de cabras del rebaño es $10a+b$, con $0 \leq b \leq 9$, los dos hermanos ha obtenido en la venta un total de

$$(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 20(5a^2+ab) + b^2$$

euros. Con el reparto "10 euros para mí, 10 euros para tí" los $20(5a^2+ab)$ euros quedan repartidos a partes iguales. Quedan por repartir b^2 euros, y como de estos, al final, el mayor aún debe tener 10 euros para él, debe ser $10 \leq b^2 \leq 81$ y la cifra de las decenas de b^2 debe ser impar. Eso sólo deja las posibilidades

- $b = 4$; $b^2 = 16$
- $b = 6$; $b^2 = 36$

En cualquiera de los dos casos, al final quedan 6 euros para el hermano pequeño. Si el llaverito costaba ℓ euros, para que los hermanos queden en paz debe ser

$$10 - \ell = 6 + \ell,$$

luego $\ell = 2$ euros.

Repartiendo con la fórmula "7 para mí, 7 para tí":

Si el número de cabras del rebaño es $7a+b$, con $0 \leq b \leq 6$, los dos hermanos ha obtenido en la venta un total de

$$(7a+b)^2 = 49a^2 + 14ab + b^2 = 42a^2 + 14ab + 7a^2 + b^2 = 14(3a^2+ab) + 7a^2 + b^2$$

euros. Con el reparto "7 euros para mí, 7 euros para tí" los $14(3a^2+ab)$ euros quedan repartidos a partes iguales. Quedan por repartir $7a^2+b^2$ euros, y como de estos, al final, el mayor aún debe tener 7 euros para él, debe ser $7 \leq 7a^2+b^2$ y la cifra de las decenas (*setenas*) del número $7a^2+b^2$ escrito en base 7 debe ser impar.

Pero, aún considerando solamente que $a = 1$,

a	b	$7a^2+b^2$	$7a^2+b^2_{(7)}$
1	0	7	10
1	1	8	11
1	2	11	14
1	4	23	32

al final podrían quedar 0, 1, 2 o 4 euros para el hermano pequeño, y ya no se podría saber el precio del llaverito.

112. Prueba que la igualdad

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución.

Definimos $u_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$. Entonces

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}.$$

Ahora, si definimos $v_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$, obtenemos que

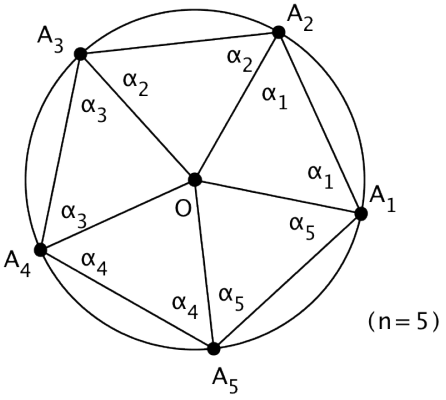
$$v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}.$$

De lo anterior, se deduce que $v_{n+1}-v_n = u_{n+1}-u_n$.

Claramente la proposición es cierta para $n = 1$. Supongamos que es verdadera para $m \in \mathbb{N}$, esto es, $u_m = v_m$. Entonces, de $u_{m+1}-u_m = v_{m+1}-v_m$ se sigue que $u_{m+1} = v_{m+1}$, que es la proposición para $m+1$.

113. Un polígono de un número impar de lados está inscrito en una circunferencia. Demuestra que si los ángulos interiores del polígono son iguales, el polígono es regular.

Primera solución.



Trácense los radios desde el centro O a los vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Cada uno de los triángulos OA_kA_{k+1} (donde $A_{n+1} = A_1$) es isósceles. Denotamos por α_k al correspondiente ángulo de la base. La hipótesis dice que

$$\begin{gathered}\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3\\ \alpha_2+\alpha_3=\alpha_3+\alpha_4\\ \vdots\\ \alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}=\alpha_{n-1}+\alpha_n\end{gathered}$$

y

$$\alpha_{n-1} + \alpha_n = \alpha_n + \alpha_1.$$

Por lo tanto

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n$$
$$\alpha_2 = \alpha_4 = \cdots = \alpha_{n-1}.$$

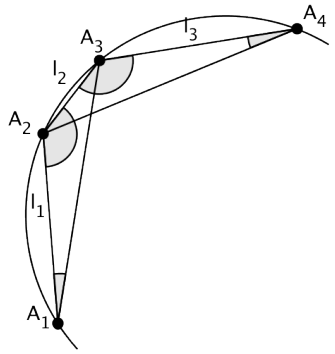
De las primeras $(n-2)$ igualdades, la última ecuación dice que $\alpha_1 = \alpha_{n-1}$; luego todos los ángulos α_k son iguales. Todos los triángulos OA_kA_{k+1} son, por lo tanto, congruentes, y el polígono es regular.

Segunda solución. Considérese un vértice cualquiera A_k con un ángulo interno α igual para todos. Se sigue que el arco inscrito en ese ángulo es constante y, por lo tanto, también lo es el arco complementario determinado por los dos vértices adyacentes al vértice A_k. Sea L su valor.

Si consideramos un arco cualquiera del polígono, la suma de los otros arcos es $\frac{n-1}{2} \cdot L$; por lo tanto, el arco tiene el valor constante $C - \frac{n-1}{2}L$, donde C es la circunferencia total. Todos los arcos son iguales y por consiguiente todos los lados son iguales.

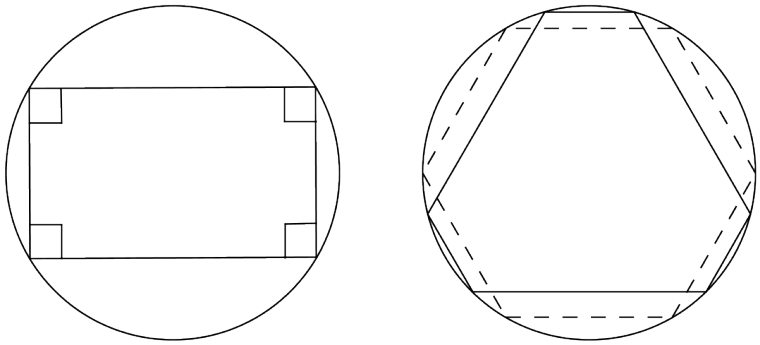
Tercera solución. Tomamos 4 vértices consecutivos. Los triángulos $A_1A_2A_3$ y $A_4A_3A_2$ son congruentes pues tienen un lado común (A_2A_3) y dos ángulos iguales

$$\begin{cases} \widehat{A_1A_2A_3} = \widehat{A_2A_3A_4} = \alpha \\ \widehat{A_2A_1A_3} = \widehat{A_2A_4A_4} \text{ , inscritos con igual arco.} \end{cases}$$



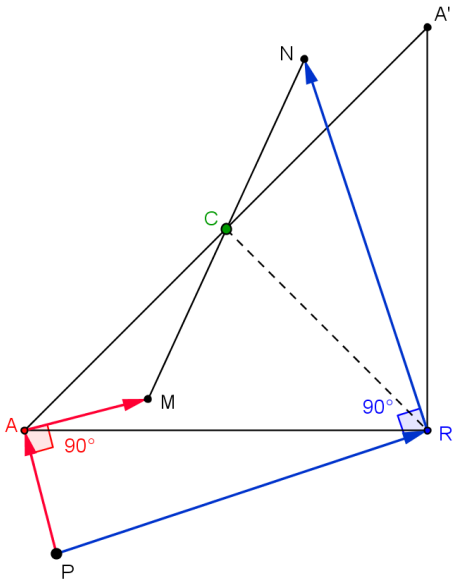
Por tanto, $l_1 = l_2$. Análogamente, $l_1 = l_3 = l_5 = \cdots = l_n = l_2 = l_4 = l_6 = \cdots$, pues el ciclo no se cierra al ser el número de lados impar.

Comentarios. Para que se dé una inscripción equiángula en los polígonos de un número par de lados es **necesario** que $l_1 = l_3 = l_5 = \cdots$ y $l_2 = l_4 = l_6 = \cdots$, como muestran los casos más sencillos.



114. Hay un cofre repleto de monedas de oro enterrado en algún punto de una isla. Has encontrado un documento que contiene las siguientes instrucciones: "Camina en línea recta desde la gran piedra blanca hacia el abedul contando tus pasos. Al llegar al abedul, gira 90° hacia tu derecha y camina ese mismo número de pasos. Así habrás llegado al punto M. Vuelve a la gran piedra blanca, y ahora camina en línea recta hacia el roble contando los pasos. Al llegar al roble, gira 90° hacia tu izquierda y camina otros tantos pasos. Estarás en el punto N. El cofre está enterrado exactamente en el punto medio del segmento MN." Con semejante documento en tu poder, has decidido naturalmente probar fortuna. Así que finalmente has llegado a la isla, y has identificado rápidamente el abedul y el roble. Pero ni el menor rastro de esa gran piedra blanca desde la que se verían los dos árboles. Empiezas a notar cierto desasosiego entre los marineros del barco que te ha llevado a la isla que te hace temer lo peor. ¿Podrías hacer aún algo para salvar el pellejo?

Solución.



Afortunadamente habías llegado a la isla con un ordenador portátil y, antes de que se agotase la batería, tuviste tiempo de preparar un archivo GeoGebra como el que muestra la figura anterior. Se te ocurrió mover con el puntero el punto P que habías asignado a

la posición de la gran piedra blanca (A y R representaban las posiciones del abedul y del roble respectivamente) y, no sin asombro, observaste que movieras adonde movieras el punto P, el punto medio C del segmento MN se quedaba fijo y situado a medio camino entre el punto A y el punto A' que resultaba de caminar contando los pasos desde A hasta R, en R girar 90° hacia la izquierda y caminar a continuación otros tantos pasos. Esa observación valía una fortuna y te salvaba la vida.

Esto es lo que escribiste al volver a tu ciudad y consultar unos libros de Geometría. ¡Qué quebradero de cabeza cada vez que lo vuelvo a leer!

La transformación geométrica que convierte el punto M en el punto N es la composición de dos giros; el primero, $g_A = G_{-90^\circ}(A)$, de 90° en sentido horario en torno al punto fijo A, convierte el punto M en el punto P, y el segundo, $g_R = G_{-90^\circ}(R)$, de 90° en sentido horario en torno al punto fijo R, convierte el punto P en el punto N. De modo que $N = g_R(g_A(M)) = (g_R \circ g_A)(M)$.

Para saber cuál es el resultado de la composición de estos dos giros, una manera es representar a su vez cada giro como composición de reflexiones respecto de dos rectas cualesquiera que pasen por el centro del giro y formen entre ellas un ángulo igual a la mitad del ángulo del giro. Así, si C es el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo e isósceles de hipotenusa AR y en el que los vértices ARC en este orden recorren ese triángulo en sentido antihorario, y denotamos respectivamente por m_{AR}, m_{AC} y m_{RC} las reflexiones respecto de las rectas AR, AC y RC, se tiene que

$$g_A = m_{AR} \circ m_{AC} \quad \text{y } g_R = m_{RC} \circ m_{AR},$$

de modo que, como la composición es asociativa y $m_{AR} \circ m_{AR}$ es la transformación identidad,

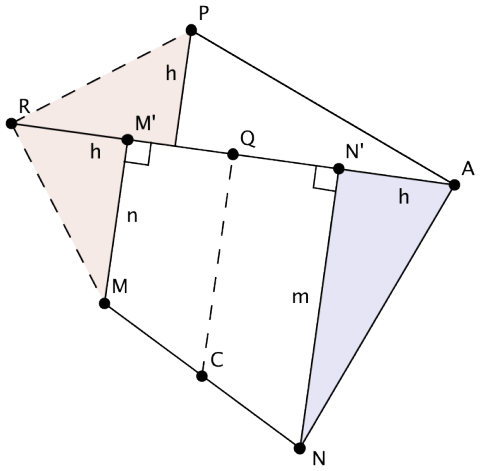
$$g_R \circ g_A = m_{RC} \circ m_{AR} \circ m_{AR} \circ m_{AC} = m_{RC} \circ m_{AC}.$$

Pero esto es una composición de reflexiones en dos rectas que pasan por el punto C antes construido y que forman entre ellas un ángulo de 90°. Así que su producto es un giro, g_C, de 180° en torno al punto C. En total, resulta que

$$N = g_C(M)$$

y que por lo tanto, el punto medio del segmento MN, sea cual sea el punto M, es siempre el punto C.

Otra solución. Tomamos un punto P cualquiera como posición de la piedra blanca. Trazamos por M y N perpendiculares a RA.



C es el punto medio del lado oblicuo del trapecio rectángulo $MM'N'N$. Q es el punto medio de RA y de $M'N'$. Se tiene

$$QC = \frac{M'M + N'N}{2} = \frac{m+n}{2} = \frac{AR}{2}.$$

También $RQ = \frac{AR}{2}$.

Solución: Desde Q (punto medio de RA) y sobre la perpendicular a RA tomamos la distancia $\frac{AR}{2}$ para llegar a C independientemente del punto P elegido.