7. Resolver (a mano) las ecuaciones

a) $16x(x+1)(x+2)(x+3) = 9.$

b) $x^{10} + 1 + (x+1)^{10} = 2(x^2+x+1)^5 + 15x^2(x^2+x+1)^2,$

Solución.

a)

$$\begin{aligned}16x(x+1)(x+2)(x+3) &= 2x(2x+6)(2x+2)(2x+4)\\ &= (4x^2+12x)(4x^2+12x+8)\\ &= ((4x^2+12x+4)-4)((4x^2+12x+4)+4)\\ &= (4x^2+12x+4)^2-16,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}16x(x+1)(x+2)(x+3)-9 &= (4x^2+12x+4)^2-25\\ &= (4x^2+12x-1)(4x^2+12x+9)\\ &= (4x^2+12x-1)(2x+3)^2,\end{aligned}$$

y las soluciones de la ecuación son $x = -\frac{3}{2}$ (doble) y $x = \frac{-3\pm\sqrt{10}}{2}$.

b) Consideremos el polinomio $p(x) = x^{10} + 1 + (x+1)^{10} - 2(x^2+x+1)^5$. Se tiene $x^{10}p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x)$, luego el polinomio es *recíproco*, es decir, sus coeficientes forman una lista capicúa. En este tipo de polinomios una herramienta de factorización es la sustitución $x + \frac{1}{x} = y$. Con esta idea en la cabeza, comencemos dividiendo el polinomio por x^5:

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{x^5} &= x^5 + \frac{1}{x^5} + \left(\frac{x^2+2x+1}{x}\right)^5 - 2\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)^5\\ &= x^5 + \frac{1}{x^5} + \left(x+\frac{1}{x}+2\right)^5 - 2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^5.\end{aligned}$$

Ahora, de

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5 = x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$$

se obtiene

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^5 - 5\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) - 10\left(x+\frac{1}{x}\right),$$

y de

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$$

se obtiene

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right),$$

así que

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Sustituyendo esto en el primer cálculo, y haciendo en su momento la sustitución $x + \frac{1}{x} = y$, tendremos

$$\begin{aligned}
\frac{p(x)}{x^5} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) \\
&\quad + \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 + 10\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 + 40\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 80\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 80\left(x + \frac{1}{x}\right) + 32 \\
&\quad - 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^5 - 10\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 20\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 20\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 \\
&= 15\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 60\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 75\left(x + \frac{1}{x}\right) + 30 \\
&= 15(y^3 + 4y^2 + 5y + 2) \\
&= 15(y+1)^2(y+2),
\end{aligned}$$

de donde resulta

$$\begin{aligned}
p(x) &= 15x^5(y+1)^2(y+2) \\
&= 15x^5\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)^2\left(x + \frac{1}{x} + 2\right) \\
&= 15x^2(x^2 + x + 1)(x+1)^2.
\end{aligned}$$

Con esto, la ecuación del enunciado queda

$$15x^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2 = 15x^2(x^2+x+1)^2,$$

o bien

$$15x^3(x+2)(x^2+x+1)^2 = 0,$$

cuyas soluciones son $x = 0$ (triple), $x = -2$ y las complejas conjugadas $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$ (dobles).

8. Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 = a_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) \\ x_2 = a_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + \ldots + x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_n - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) \end{cases}$$

Solución.

De las ecuaciones sale

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2a_1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\
x_2 &= 2a_2 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\
&\vdots \\
x_n &= 2a_n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)
\end{aligned}$$

y sumando

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2\sum_{i=1}^{n} a_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{o bien} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1}.$$

Finalmente, sustituyendo estos valores en las ecuaciones iniciales queda

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2a_1 - \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1} = 2\left(a_1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1}\right)\\
x_2 &= 2a_2 - \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1} = 2\left(a_2 - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1}\right)\\
&\vdots\\
x_n &= 2a_n - \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1} = 2\left(a_n - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

De otro modo:

Si llamamos $A = \sum_{j=1}^{n} a_j$ y $S = \sum_{j=1}^{n} x_j$, al sumar todas las ecuaciones queda $S = A - \frac{n-1}{2}S$, de donde resulta que $S = \frac{2A}{n+1}$.

Cada incógnita cumple:

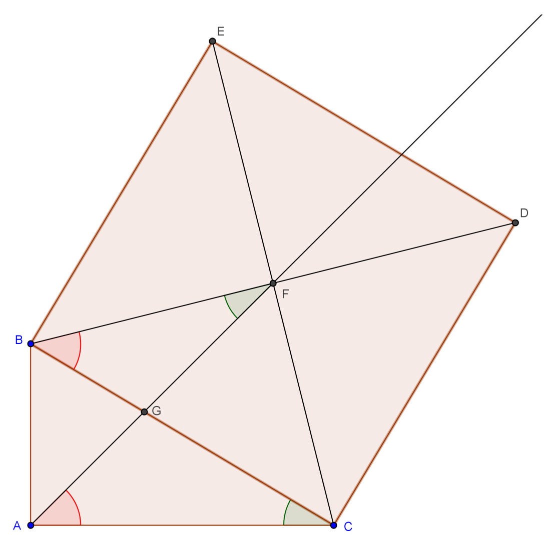
$$x_i = a_i - \frac{1}{2}(S - x_i),$$

de donde se obtiene, al expresar S en función de A:

$$x_i = 2a_i - \frac{2A}{n+1} = 2\left(a_i - \frac{\sum_{j=i}^{n} a_j}{n+1}\right).$$

9. Probar que, dado un triángulo rectángulo, la recta que pasa por el vértice del ángulo recto y por el centro del cuadrado construido sobre la hipotenusa es bisectriz del ángulo recto.

Solución.



El cuadrilátero $ABFC$ es inscriptible en una circunferencia ya que los ángulos opuestos en A y en F son rectos. Entonces los triángulos BGF y AGC son semejantes, por lo tanto $\angle GAC = \angle GBF = 45°$.

10. El profesor de matemáticas escribió en la pizarra el polinomio cuadrático $x^2+10x+20$. A continuación cada uno de sus alumnos debía aumentar o disminuir en 1 o bien el término independiente o bien el coeficiente del término lineal. Finalmente quedó escrito en la pizarra el polinomio $x^2 + 20x + 10$. ¿Hubo en algún momento escrito en la pizarra un polinomio con raíces enteras?

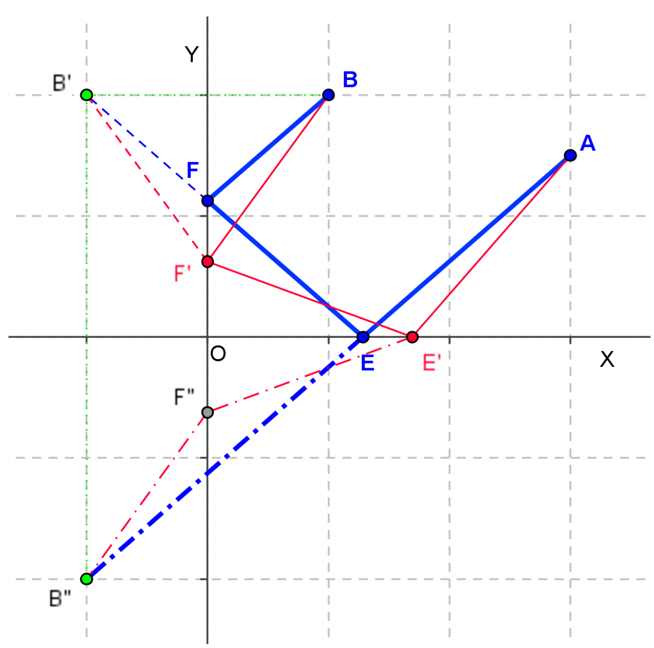
Solución.

Todos los polinomios que se van escribiendo tienen la forma $x^2 + ax + b$ con a y b enteros, y cada operación realizada por los alumnos cambia el valor de $a - b$ en ± 1. Al comenzar, $a - b = -10$, y al acabar $a - b = 10$. Por tanto, en algún momento del proceso, $a - b = 1$, y se habrá escrito el polinomio cuadrático $x^2 + (b+1)x + b = (x+1)(x+b)$ que tiene las raíces enteras -1 y $-b$.

11. Se dan los puntos $A(6,3)$ y $B(2,4)$ en el interior del primer cuadrante de un sistema de ejes perpendiculares OXY con igual escala en los ejes. Se trata de construir un camino, lo más corto posible, que parta del punto A, vaya a un punto de OX, recorra sobre OX un segmento de longitud 1, vaya después a OY, recorra sobre OY un segmento de longitud 2, y termine en el punto B.

Solución.

En primer lugar, si el problema fuese (más sencillo) construir el camino más corto posible que parta del punto A, vaya a un punto de OX, vaya después a un punto de OY y termine en el punto B, la solución sería el camino $AEFB$ de color azul en la figura siguiente, donde B' es el simétrico del punto B respecto del eje OY y B'' es el simétrico del punto B' respecto del eje OX:



Ya que

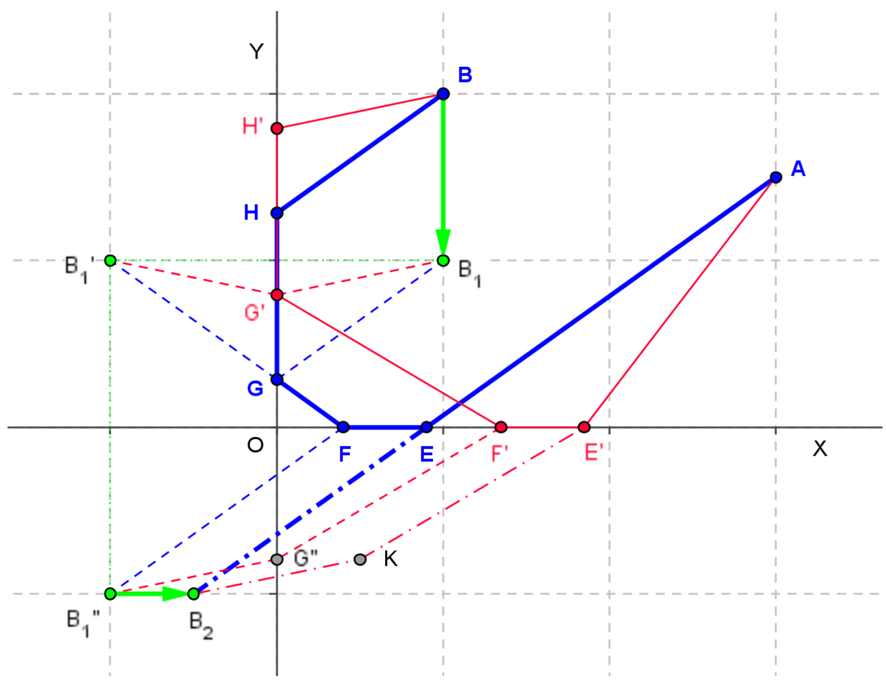
$$AE + EF + FB = AE + EF + FB' = AE + EB' = AE + EB'' = AB''$$

y, para cualquier otro camino, como el $AE'F'B$ (de color rojo), llamando F'' al simétrico del punto F' respecto del eje OX, se tiene

$$AE' + E'F' + F'B = AE' + E'F' + F'B' = AE' + E'F'' + F''B'' \geq AB'',$$

porque la distancia más corta entre los puntos A y B'' es la longitud del segmento rectilíneo AB''.

Vamos ahora con el problema propuesto. La solución es el camino $AEFGHB$ dibujado en trazo azul grueso en la figura siguiente, que pasamos a explicar: el punto B_1 se obtiene trasladando el punto B con el vector $(0, -2)$; B_1' es el simétrico del punto B_1 respecto del eje OY y B_1'' es el simétrico del punto B_1' respecto del eje OX; el punto B_2 se obtiene trasladando el punto B_1'' con el vector $(1, 0)$; el punto E es el de intersección con OX del segmento AB_2; $EF = 1$; el punto G es el de intersección con OY del segmento FB_1'; $GH = 2$.



Ya que

$$AE + FG + HB = AE + FG + GB_1 = AE + FG + GB_1' = AE + FB_1'' = AE + EB_2 = AB_2$$

y, para cualquier otro camino, como el $AE'F'G'H'B$ (de color rojo), llamando G'' al simétrico del punto G' respecto del eje OX y K al trasladado de G'' con el vector $(1, 0)$ se tiene

$$\begin{aligned} AE' + F'G' + H'B &= AE' + F'G' + G'B_1 = AE' + F'G' + G'B_1' \\ &= AE' + F'G'' + G''B_1'' = AE' + E'K + KB_2 \geq AB_2. \end{aligned}$$

12. Sea $1 \leq k < 2008$. Sea $n = \sum_{\ell=1}^{k} (2008 - \ell)^{2008}$. Determinar, si existe, el menor y el mayor k para el que n termina en 8. Lo mismo para que termine en 0.

Solución.

Por ejemplo, para $k = 3$,

$$\begin{array}{llll} 7^1 & \equiv & 7 & \pmod{10} \\ 7^2 & \equiv & 9 & \pmod{10} \\ 7^3 & \equiv & 3 & \pmod{10} \\ 7^4 & \equiv & 1 & \pmod{10} \end{array} \qquad \begin{array}{llll} 6^1 & \equiv & 6 & \pmod{10} \\ 6^2 & \equiv & 6 & \pmod{10} \end{array} \qquad \begin{array}{llll} 5^1 & \equiv & 5 & \pmod{10} \\ 5^2 & \equiv & 5 & \pmod{10} \end{array}$$

y a partir de esto,

$$n = 2007^{2008} + 2006^{2008} + 2005^{2008} \equiv 7^{2008} + 6^{2008} + 5^{2008} \equiv 1 + 6 + 5 \equiv 2 \pmod{10}.$$

Para $k = 1, 2, \ldots$ se puede ir construyendo así a mano, sin prisa, la sucesión de valores de $n \pmod{10}$ hasta encontrar un período:

$$\begin{array}{l} 1,7,2,8,9,5,6,6,7,3,4,0,5,1,2,8,9,9,0,6, \\ 7,3,8,4,5,1,2,2,3,9,0,6,1,7,8,4,5,5,6,2, \\ 3,9,4,0,1,7,8,8,9,5,6,2,7,3,4,0,1,1,2,8, \\ 9,5,0,6,7,3,4,4,5,1,2,8,3,9,0,6,7,7,8,4, \\ 5,1,6,2,3,9,0,0,1,7,8,4,9,5,6,2,3,3,4,0, \\ 1,7,2,8,9,5,6,6,7,3,4,0,5,1,2,8,9,9,0,6, \\ 7,3,8,4,5,1,2,2,3,9,0,6,1,7,8,4,5,5,6,2,\ldots \end{array}$$

El menor valor de k para el que n termina en 8 es $k = 4$. Como el período de esta sucesión es 100, el mayor valor de k para el que n termina en 8 es $k = 2004$.

El menor valor de k para el que n termina en 0 es $k = 12$, y el mayor valor de k para el que n termina en 0 es $k = 2000$.