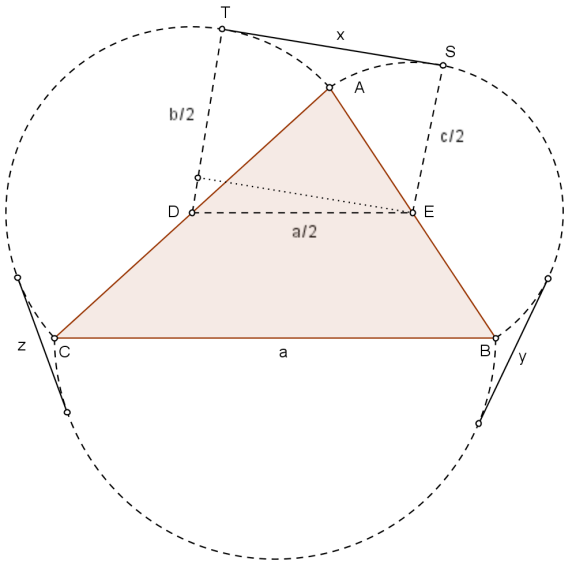
Seminario de problemas-ESO. Curso 2011-12. Hoja 19

103. Se construyen semicircunferencias (hacia afuera) sobre los lados de un triángulo ABC, y se trazan la tres tangentes comunes a cada dos semicircunferencias consecutivas. Sean x, y, z las longitudes de estas tres tangentes, y a, b, c las de los lados del triángulo. Prueba que

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = \frac{a+b+c}{2}\,.$$

Solución.



Está claro con la figura que las rectas DT y ES son paralelas, por ser ambas perpendiculares a la tangente común TS. Luego

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = (p-c)(p-b),$$

si se llama $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Análogamente para las otras dos longitudes y y z, se tendrá:

$$y^2 = (p-a)(p-c), \qquad z^2 = (p-a)(p-c).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} &= \frac{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{xyz} \\ &= \frac{(p-c)^2(p-a)(p-b) + (p-a)^2(p-c)(p-b) + (p-b)^2(p-a)(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= p - c + p - a + p - b = 3p - 2p = p.\end{aligned}$$

104. Encuentra los tres números enteros que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a+b+c=24 \\ a^2+b^2+c^2=210 \\ abc=440 \end{cases}$$

Solución.

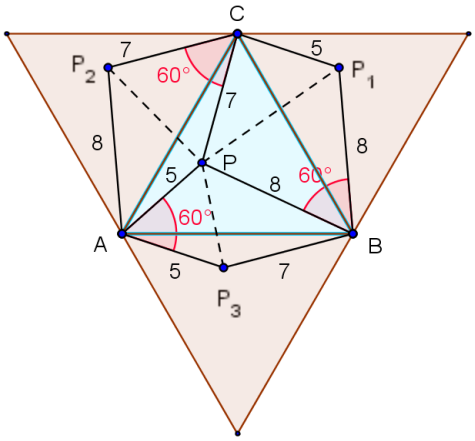
Usando las dos primeras ecuaciones, de $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ resulta $ab+bc+ac=183$. Entonces (Cardano-Vieta), a, b y c son las tres raíces de la ecuación

$$x^3-24x^2+183x-440=0.$$

Si en esta ecuación hacemos $x-8=y$, $x=y+8$, resulta $y^3-9y=0$, de soluciones $y=0$, -3 y 3; las soluciones de la ecuación en x son entonces 8, 5 y 11.

105. En el interior de un triángulo equilátero ABC hay un punto P tal que $PA=5$, $PC=7$ y $PB=8$. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo?

Solución.



Girando 60° el punto P en torno a cada vértice del triángulo equilátero ABC, resultan los puntos P_1, P_2 y P_3 (figura).

El área del hexágono $AP_3BP_1CP_2$ es, por una parte, el doble del área del $\triangle ABC$. Y, por otra parte, se compone de tres triángulos equiláteros de lados 5, 7 y 8 respectivamente, y de tres triángulos iguales entre sí de lados 5, 7 y 8.

Entonces, si el lado del $\triangle ABC$ es ℓ, se tiene (fórmula de Herón)

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{4}+\frac{49\sqrt{3}}{4}+\frac{64\sqrt{3}}{4}+3\sqrt{10\cdot 5\cdot 3\cdot 2},$$

de donde resulta $\ell=\sqrt{129}$.

106. Se le asigna un entero no negativo a cada entero positivo n, de manera que se cumplen las condiciones:

i) $f(mn) = f(m) + f(n)$.

ii) $f(n) = 0$ si la cifra de las unidades de n es 3.

iii) f(10)=0.

Demuestra que $f(n) = 0$ para todo entero positivo n.

Solución.

$$f(1) = f(1 \cdot 1) \overset{\text{i)}}{=} f(1) + f(1) = 2f(1),$$

luego $f(1) = 0$. $f(3) = 0$ por ii). También,

$$0 \leq f(2) + f(5) = f(10) \overset{\text{iii)}}{=} 0,$$

luego $f(2) = f(5) = 0$.

Sea p primo distinto de 2 y de 5, veamos que $f(p) = 0$:

- Si p acaba en 1, $3p$ acaba en 3 y

$$0 \overset{\text{iii)}}{=} f(3p) = f(3) + f(p) = f(p).$$

- Si p acaba en 3, $f(p) = 0$ por ii).
- Si p acaba en 7 (en particular si $p = 7$), $9p$ acaba en 3 y

$$0 \overset{\text{iii)}}{=} f(9p) = f(9) + f(p) = 2f(3) + f(p) = f(p).$$

- Si p acaba en 9, $7p$ acaba en 3 y

$$0 \overset{\text{iii)}}{=} f(7p) = f(7) + f(p) = f(p).$$

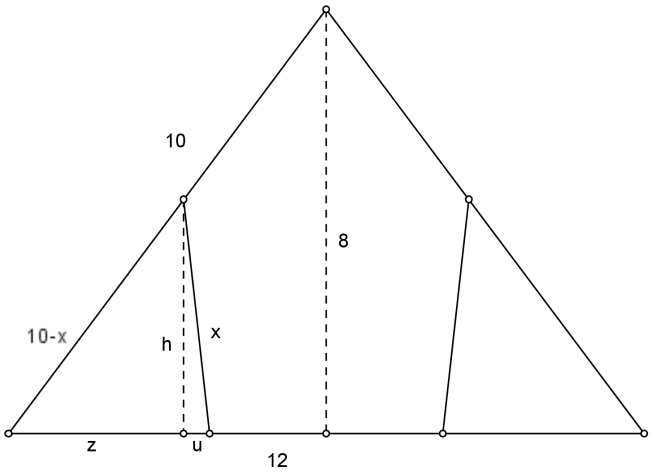
Ahora, para n cualquiera, se considera la descomposición de n en factores primos, $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, y se tiene

$$f(n) \overset{\text{i)}}{=} \alpha_1 \, f(p_1) + \ldots + \alpha_k \, f(p_k) = 0,$$

ya que $f(p_1) = \cdots = f(p_k) = 0$ según se ha probado antes.

107. En un triángulo isósceles de lados 10, 10 y 12 se recortan simétricamente dos esquinas triangulares y se obtiene entonces un pentágono equilátero. Halla el lado de dicho pentágono.

Solución.



La altura del triángulo es $\sqrt{10^2-6^2}=8$.

Por semejanza de triángulos (ver la figura),

$$\frac{6}{z}=\frac{8}{h}=\frac{10}{10-x}\,.$$

De aquí,

$$h=\frac{4(10-x)}{5}\,,\qquad x=\frac{3(10-x)}{5}\,,\qquad u=6-z-\frac{x}{2}=\frac{x}{10}\,.$$

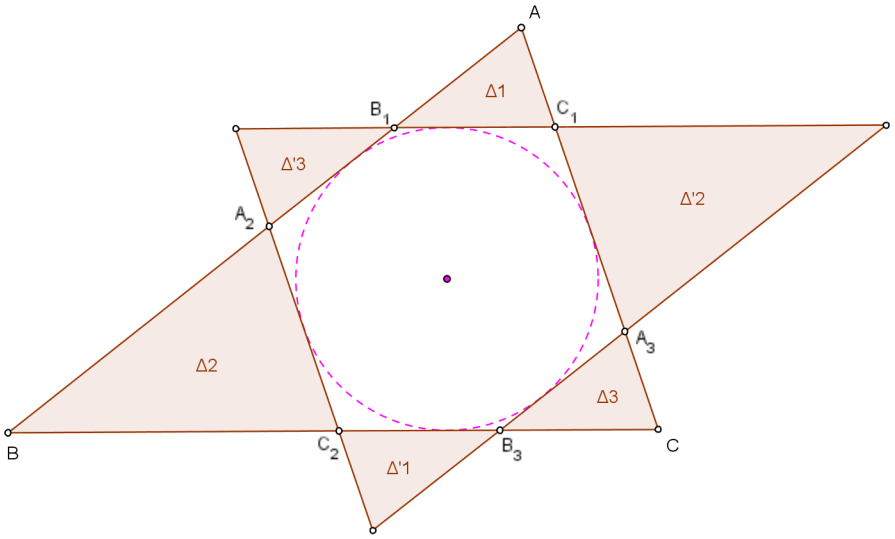
Y entonces

$$x^2=h^2+u^2=\frac{16}{25}(10-x)^2+\frac{x^2}{100}\,,$$

ecuación de segundo grado en x: $7x^2+256x-1280=0$; $x=\frac{1}{7}(-128+\sqrt{25344})\approx 4.45$.

108. Prueba que, en la figura estrellada que se forma al dibujar tres pares de tangentes paralelas a una circunferencia de radio R, el producto de las áreas de los ocho triángulos que se forman es R^{16}.

Solución.



Denotando por $[XYZ]$ el área del $\triangle XYZ$, llamemos, con la notación de vértices empleada en la figura, $[ABC] = \Delta$; $[AB_1C_1] = \Delta_1$; $[A_2BC_2] = \Delta_2$; $[A_3B_3C] = \Delta_3$; estos cuatro triángulos son semejantes, y a cada uno de ellos, por simetría, le corresponde uno igual a él. El producto de las áreas de los ocho triángulos es, entonces, $(\Delta \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_3)^2$.

Ahora bien, $\Delta = pR$ siendo p el semiperímetro del $\triangle ABC$. Y, por las semejanzas entre los triángulos pequeños y el grande se tiene, si representamos por h_a, h_b y h_c, respectivamente, las longitudes de las alturas del $\triangle ABC$ que parten de los vértices A, B y C:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \Big(\frac{h_a - 2R}{h_a}\Big)^2; \quad \frac{\Delta_2}{\Delta} = \Big(\frac{h_b - 2R}{h_b}\Big)^2; \quad \frac{\Delta_3}{\Delta} = \Big(\frac{h_c - 2R}{h_c}\Big)^2;$$

luego

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_3 = \Delta^3\Big(1 - \frac{2R}{h_a}\Big)^2\Big(1 - \frac{2R}{h_b}\Big)^2\Big(1 - \frac{2R}{h_c}\Big)^2,$$

y como $\Delta = pR = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, queda

$$\begin{aligned}\Delta \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_3 &= p^4R^4\Big(1 - \frac{a}{p}\Big)^2\Big(1 - \frac{b}{p}\Big)^2\Big(1 - \frac{c}{p}\Big)^2 \\ &= \frac{R^4}{p^4}\,p^2(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 = \frac{R^4}{p^4}\,\Delta^4 \\ &= \frac{R^4}{p^4}\,p^4R^4 = R^8.\end{aligned}$$