

- 99.** Encuentra las cuatro raíces r_1, r_2, r_3, r_4 de la ecuación $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$, sabiendo que son las cuatro positivas y que se verifica $\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1$.

Solución.

Poniendo $r_1 = 2s_1, r_2 = 4s_2, r_3 = 5s_3$ y $r_4 = 8s_4$, se verifica

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1;$$

por otra parte, de las relaciones de Cardano-Vieta resulta

$$r_1 r_2 r_3 r_4 = 320 s_1 s_2 s_3 s_4 = \frac{5}{4},$$

luego

$$s_1 s_2 s_3 s_4 = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{4}\right)^4.$$

De manera que la media aritmética de los números positivos s_i coincide con su media geométrica. Entonces

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \frac{1}{4}$$

y, por lo tanto,

$$r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = \frac{5}{4}, \quad r_4 = 2.$$

- 100.** Los números reales no negativos $a_1, a_2, \dots, a_n$ cumplen las condiciones

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= 2n, \\ \binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \dots + \binom{a_n}{2} &= n. \end{aligned}$$

Prueba que $a_j = 2$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

Solución.

Se tiene, usando la primera condición,

$$\begin{aligned} \binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \dots + \binom{a_n}{2} &= \frac{a_1^2 - a_1}{2} + \frac{a_2^2 - a_2}{2} + \dots + \frac{a_n^2 - a_n}{2} \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{2} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2} \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{2} - n. \end{aligned}$$

Pero esta cantidad, cuando $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n$, es siempre mayor o igual que n , es decir,

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{2} - n \geq n$$

o bien,

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq 4,$$

ya que usando la desigualdad de medias aritmética y cuadrática sabemos que, en este caso,

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 2.$$

Además la segunda condición del enunciado dice que aquí se alcanza la igualdad. Eso implica, como sabemos, que

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n,$$

y como la suma de todos estos números es $2n$, cada uno de ellos debe ser igual a 2.

- 101.** En el plano cartesiano, los puntos $A(3, 7)$, $B(9, 1)$, $C(11, 13)$ y $D(8, 14)$ están sobre lados consecutivos de un cuadrado, o sobre sus prolongaciones. Halla la longitud del lado del cuadrado.

Solución.

Con geometría analítica:

$$r: \text{recta por } A \text{ con pendiente } m: y - 7 = m(x - 3)$$

$$s: \text{recta por } C \text{ con pendiente } m: y - 13 = m(x - 11)$$

Un punto de r : $R(0, 7 - 3m)$. Distancia entre las rectas r y s :

$$\ell_1 = d(R, s) = \frac{|-11m + 13 - 7 + 3m|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{|6 - 8m|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Y análogamente,

$$t: \text{recta por } B \text{ con pendiente } -1/m: x - 9 = -m(y - 1)$$

$$u: \text{recta por } D \text{ con pendiente } -1/m: x - 8 = -m(y - 14)$$

Un punto de t : $T(9 + m, 0)$. Distancia entre las rectas t y u :

$$\ell_2 = d(T, u) = \frac{|9 + m - 8 - 14m|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{|1 - 13m|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Con esto, $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, el lado del cuadrado que queremos, si y sólo si $|6 - 8m| = |1 - 13m|$, lo que deja dos posibilidades:

$$6 - 8m = 1 - 13m \implies m = -1 \implies \ell = 7\sqrt{2},$$

$$6 - 8m = -1 + 13m \implies m = \frac{1}{3} \implies \ell = \sqrt{10}.$$

o bien

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},$$

que es la desigualdad de medias aritmética y cuadrática de los números no negativos a , b y c . La igualdad se cumple aquí cuando $a = b = c$, es decir, cuando $x^2 = y^2 = z^2$.