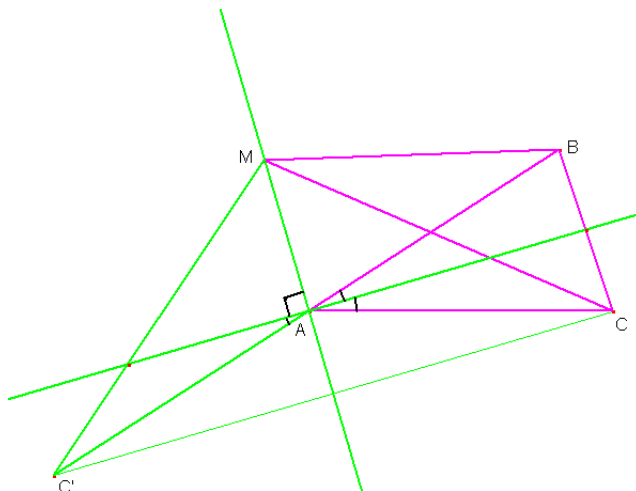


- 92.** Por el vértice  $A$  de un triángulo  $ABC$  se traza la recta  $XY$  perpendicular a la bisectriz del ángulo  $A$ . Demuestra que, si  $M$  es un punto cualquiera de  $XY$ , el perímetro del triángulo  $BMC$  es mayor que el del triángulo  $ABC$ .

*Solución*



En la simetría axial de eje  $AM$  perpendicular a la bisectriz, el transformado de  $C$ ,  $C'$  está alineado con  $A$  y  $B$ .

$$d(A, B) + d(A, C) = d(A, B) + d(A, C') = d(B, C')$$

$$d(B, M) + d(M, C) = d(B, M) + d(M, C')$$

Por la desigualdad triangular es

$$d(B, C') \geq d(B, M) + d(M, C')$$

- 93.** Un número tiene 216 divisores, su duplo tiene 270 divisores, su tercera parte, 180 divisores y su quinta parte, 144 divisores. Halla dicho número con la condición de que sea el más pequeño de los que cumplen dichas condiciones.

*Solución.*

El número  $n$  será de la forma

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot \dots$$

$$\left. \begin{array}{lcl} (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)\dots & = & 216 \\ (a+2)(b+1)(c+1)(d+1)\dots & = & 270 \\ (a+1)b(c+1)(d+1)\dots & = & 180 \\ (a+1)(b+1)c(d+1)\dots & = & 144 \end{array} \right\}$$

Dividiendo miembro a miembro la primera ecuación por la segunda

$$\frac{a+1}{a+2} = \frac{216}{270}$$

$$270a + 270 = 216a + 432$$

$$54a = 162$$

$$a = 3$$

Dividiendo miembro a miembro la tercera ecuación por la primera

$$\frac{b}{b+1} = \frac{180}{216}$$

$$216b = 180b + 180$$

$$36b = 180$$

$$b = 5$$

Dividiendo miembro a miembro la cuarta ecuación por la primera

$$\frac{c}{c+1} = \frac{144}{216}$$

$$216c = 144c + 144$$

$$72c = 144$$

$$c = 2$$

Sustituyendo en cualquiera de ellas, por ejemplo en la primera

$$4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot (d+1) = 216$$

$$d = 2$$

$$n = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 2381400$$

- 94.** Varios gorriones se posan en los árboles de una finca. Si en cada árbol hay sólo un gorrión, quedan  $n$  gorriones volando, y si sobre cada uno de los árboles se posan  $n$  gorriones, quedan  $n$  árboles libres. Se pide el número de gorriones y el de árboles.

*Solución.*

Sea  $p$  el número de árboles. El número de gorriones es  $n + p$ .

$$(p - n)n = n + p$$

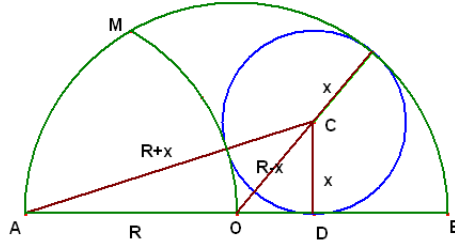
$$(n - 1)p = n^2 + n$$

$$p = \frac{n^2 + n}{n - 1} = \frac{n(n + 1)}{n - 1}$$

| $n$ | $p$ | $n + p$ |
|-----|-----|---------|
| 2   | 6   | 8       |
| 3   | 6   | 9       |

- 95.** Se tiene una semicircunferencia que tiene de diámetro un segmento  $AB = 2R$  y  $O$  es el punto medio del segmento  $AB$ . Con centro en  $A$  y radio  $OA$  se traza el arco  $OM$ , donde  $M$  es un punto de la semicircunferencia inicial. Calcula, en función de  $R$ , el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo mixtilíneo  $OMB$ .

*Solución.*



$$AD = \sqrt{(R+x)^2 - x^2}$$

$$(R-x)^2 = x^2 + \left( \sqrt{(R+x)^2 - x^2} - R \right)^2$$

$$R^2 - 2Rx + x^2 = x^2 + R^2 + 2Rx - 2R\sqrt{R^2 + 2Rx} + R^2$$

$$2R\sqrt{R^2 + 2Rx} = R^2 + 4Rx$$

$$2\sqrt{R^2 + 2Rx} = R + 4x$$

$$4R^2 + 8Rx = R^2 + 8Rx + 16x^2$$

$$3R^2 = 16x^2$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4}R$$

- 96.** Determina  $a$ ,  $b$  y  $c$  de manera que el polinomio  $(x+1)^5 + a(x+1)^3 + bx + c$  sea divisible por  $(x-1)^3$  y hallar el cociente.

*Solución.*

$$p(x) = (x+1)^5 + a(x+1)^3 + bx + c = q(x)(x-1)^3$$

$$p'(x) = 5(x+1)^4 + 3a(x+1)^2 + b = q'(x)(x-1)^3 + q(x)(x-1)^2 \cdot 3 =$$

$$r(x)(x-1)^2$$

$$p''(x) = 20(x+1)^3 + 6a(x+1) = r'(x)(x-1)^2 + r(x)2(x-1) = s(x)(x-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^5 + a2^3 + b + c = 0 \\ 5 \cdot 2^4 + 3a2^2 + b = 0 \\ 20 \cdot 2^3 + 6a2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$a = -\frac{160}{12} = -\frac{40}{3}$$

$$b = -5 \cdot 16 + 160$$

$$b = 80$$

$$c = -32 + \frac{320}{3} - 80$$

$$c = -\frac{16}{3}$$

El cociente es:

$$x^2 + 8x + \frac{53}{3}$$

### **Solución alternativa en potencias de $x - 1$ (Pilar Benito)**

Reescribimos el polinomio expresándolo en potencias de  $x - 1$ :

$$p(x) = (x + 1)^5 + a(x + 1)^3 + bx + c = q(x)(x - 1)^3 = s(x)(x - 1)^3 + r(x)$$

$$[(x - 1) + 2]^5 + a[(x - 1) + 2]^3 + b(x - 1) + b + c$$

desarrollamos las potencias 5 y 3.

$$(x - 1)^5 + 10(x - 1)^4 + 40(x - 1)^3 + 80(x - 1)^2 + 80(x - 1) + 32 +$$

$$a(x - 1)^3 + 6a(x - 1)^2 + 12a(x - 1) + 8a + b(x - 1) + b + c =$$

$$(x - 1)^5 + 10(x - 1)^4 + (40 + a)(x - 1)^3 + (80 + 6a)(x - 1)^2 + (80 + 12a + b)(x - 1) + 40 + b + c =$$

$$[(x - 1)^2 + 10(x - 1) + (40 + a)](x - 1)^3 + r(x)$$

donde

$$r(x) = (80 + 6a)(x - 1)^2 + (80 + 12a + b)(x - 1) + 40 + b + c,$$

$$(x - 1)^2 + 10(x - 1) + (40 + a)$$

Así,  $p(x)$  será divisible por  $(x - 1)^3$  sii  $r(x) = 0$ . Resolvemos el sistema,

$$\left. \begin{array}{rrcr} 80 & + & 6a & = & 0 \\ 80 & + & 12a & + & b & = & 0 \\ 40 & + & 8a & + & b & + & c & = & 0 \end{array} \right\}$$

que tiene por solución,

$$a = -\frac{40}{3}$$

$$b = -80 - 12a = -80 + 160 = 80$$

$$c = -40 - 8a - b = -120 + \frac{320}{3} = -\frac{16}{3}.$$

El cociente que nos queda es

$$s(x) = (x - 1)^2 + 10(x - 1) + \frac{80}{3} = x^2 + 8x + \frac{53}{3}$$

.

**Solución alternativa usando Ruffini (Pilar Benito):** Reescribimos el polinomio  $p(x)$  susutituyendo  $y = x + 1$ :

$$p(x) = y^5 + ay^3 + by + c - b = q(y)$$

y observamos que  $x = 1$  ocurre si y sólo si  $y = 2$ . Por el teorema del resto,  $p(x)$  es divisible por  $x - 1$  sii  $x = 1$  es raíz de  $p(x)$  sii  $y = 2$  es raíz de  $q(y)$  sii  $q(y)$  es divisible por  $y - 2$ . Aplicamos Ruffini a  $q(y)$  tres veces porque buscamos divisibilidad por  $(y - 2)^3$ :

|   |   |    |           |               |                    |                       |
|---|---|----|-----------|---------------|--------------------|-----------------------|
|   | 1 | 0  | 1         | 0             | $b$                | $c - b$               |
| 2 | 2 | 4  | $8 + 2a$  | $16 + 4a$     | $32 + 8a + 2b$     |                       |
|   | 1 | 2  | $4 + a$   | $8 + 2a$      | $16 + 4a + b$      | $32 + 8a + b + a = 0$ |
| 2 | 2 | 8  | $24 + 2a$ | $64 + 8a$     |                    |                       |
|   | 1 | 4  | $12 + a$  | $32 + 4a$     | $80 + 12a + b = 0$ |                       |
| 2 | 2 | 12 | $48 + 2a$ |               |                    |                       |
|   | 1 | 6  | $24 + a$  | $80 + 6a = 0$ |                    |                       |

y nos queda que para que  $p(x)$  sea divisible por  $(x - 1)^3$  se ha de cumplir que

$$\left. \begin{array}{rcl} 80 + 6a & = & 0 \\ 80 + 12a + b & = & 0 \\ 40 + 8a + b + c & = & 0 \end{array} \right\}$$

La solución a este sistema es,

$$\begin{aligned} a &= -\frac{40}{3} \\ b &= -80 - 12a = -80 + 160 = 80 \\ c &= -40 - 8a - b = -120 + \frac{320}{3} = -\frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Además es

$$s(x) = y^2 + 6y + 24 + a = (x + 1)^2 + 6(x + 1) + \frac{32}{3} = x^2 + 8x + \frac{53}{3}$$

**Solución alternativa por Víctor Lanchares:** Hagamos el cambio de variable  $x - 1 = z$ , y expresemos el polinomio que nos dan en potencias de  $z$ . Que el polinomio original sea divisible por  $(x - 1)^3$  es lo mismo que el nuevo polinomio sea divisible por  $z^3$ , o lo que es lo mismo, que no contenga potencias de grado menor que 3.

$$(x + 1)^5 + a(x + 1)^3 + bx + c = (z + 2)^5 + a(z + 2)^3 + b(z + 1) + c.$$

Buscamos los coeficientes de las potencias de grado menor que 3.

$$\begin{aligned} z^2 &\longrightarrow 10 \times 2^3 + 3 \times 2 \times a \\ z^1 &\longrightarrow 5 \times 2^4 + 3 \times 2^2 \times a + b \\ z^0 &\longrightarrow 2^5 + a \times 2^3 + b + c \end{aligned}$$

Igualando a 0 los coeficientes anteriores resulta:  $a = -40/3$ ,  $b = 80$ ,  $c = -16/3$ .

**97.** Determina  $a$  para que la ecuación

$$x^3 + x^2 - x + a = 0$$

tenga una raíz que sea la media aritmética de las otras dos, y calcula bajo esta hipótesis las tres raíces de la ecuación.

*Solución.*

$$\left. \begin{aligned} -x_1x_2x_3 &= a \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= -1 \\ x_2 &= \frac{x_1+x_3}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -x_1\frac{x_1+x_3}{2}x_3 &= a \\ x_1 + \frac{x_1+x_3}{2} + x_3 &= -1 \\ x_1\frac{x_1+x_3}{2} + x_1x_3 + \frac{x_1+x_3}{2}x_3 &= -1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -x_1x_3(x_1 + x_3) &= 2a \\ 3(x_1 + x_3) &= -2 \\ (x_1 + x_3)^2 + 2x_1x_3 &= -2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_3 &= -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} + 2x_1x_3 &= -2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_3 &= -\frac{2}{3} \\ x_1x_3 &= -\frac{11}{9} \end{aligned} \right\}$$

$$z^2 + \frac{2}{3}z - \frac{11}{9} = 0$$

$$z = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{11}{9}} = -\frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{-1 - 2\sqrt{3}}{3}, \quad x_3 = \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{3}, \quad a = -\frac{11}{27}$$

**98.** Halla un número cuadrado perfecto de cuatro cifras, sabiendo que la suma de sus cifras es igual a la suma de las cifras de su raíz cuadrada. Determina todas las soluciones.

*Solución.*

Sea  $x$  un número, y sea  $s$  la suma de sus cifras,  $x - s = \dot{9}$ . Si la suma de las cifras de  $x^2$  también es  $s$ , tenemos  $x^2 - s = \dot{9}$ , por lo tanto

$$x^2 - x = x(x - 1) = \dot{9}$$

Como  $x$  y  $x - 1$  son primos entre sí, o  $x$  o  $x - 1$  debe ser múltiplo de 9.

Además, para que  $x^2$  tenga 4 cifras, debe ser  $31 \leq x \leq 99$ .

| $x$ | $x^2$ | $x$ | $x^2$ |
|-----|-------|-----|-------|
| 36  | 1296  | 37  | 1369  |
| 45  | 2025  | 46  | 2116  |
| 54  | 2916  | 55  | 3025  |
| 63  | 3969  | 64  | 4096  |
| 72  | 5184  | 73  | 5329  |
| 81  | 6561  | 82  | 6724  |
| 90  | 8100  | 91  | 8281  |
| 99  | 9801  |     |       |

$$45^2 = 2025, \quad 46^2 = 2116, \quad 55^2 = 3025, \quad 90^2 = 8100, \quad 99^2 = 9801$$