

Seminario de problemas-ESO. Curso 2011-12. Hoja 16

- 85.** Determinar, si existen, los números de la forma $abcba$ que son múltiplos simultáneamente de 11 y de 7.

Solución.

$$a + 10b + 100c + 1000b + 10000a = 10001a + 1010b + 100c$$

$$10001a + 1010b + 100c \equiv 68a + 9b + 23c \equiv 9(b - a) + 23c \pmod{77}$$

$$-9 \leq b - a \leq 8, \quad 0 \leq c \leq 9$$

c	$b - a$	c	$b - a$
0	0	5	$\frac{39}{9}$
1	6	6	$\frac{16}{9}$
2	$\frac{31}{9}$	7	$\frac{70}{9}$
3	$\frac{8}{9}$	8	$\frac{47}{9}$
4	$\frac{62}{9}$	9	$\frac{24}{9}$

Con $c = 0$ y $b = a$ tenemos

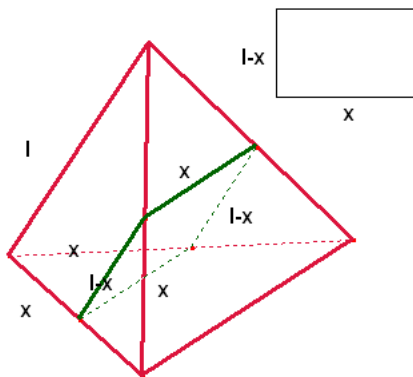
11011, 22022, 33033, 44044, 55055, 66066, 77077, 88088, 99099

Con $c = 1$ y $b = a + 6$ tenemos

17171, 28182, 39193

- 86.** Se corta un tetraedro regular por un plano paralelo a dos aristas opuestas. ¿Cuándo es máxima el área de la sección producida?

Solución.



$$S = x(l - x) = lx - x^2 = \frac{l^2}{4} - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \leq \frac{l^2}{4}.$$

El área máxima $\frac{l^2}{4}$ se alcanza cuando $x = \frac{l}{2}$.

87. Escribimos los números naturales según la configuración siguiente:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & & \\
 & & 2 & 3 & 4 & \\
 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\
 & & & \dots & &
 \end{array}$$

Se pide encontrar la suma de los números situados en la fila n -ésima.

Solución.

El último número de la fila n es n^2 .

El primer número de la fila n es $(n-1)^2 + 1$.

La suma de los números de la fila n será:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{(n-1)^2 + 1 + n^2}{2} (n^2 - (n-1)^2) \\
 &= (n^2 - n + 1)(2n - 1) = 2n^3 - 3n^2 + 3n - 1.
 \end{aligned}$$

88. Encontrar un número de cinco cifras que tiene la siguiente propiedad: si se escribe un 1 a su derecha se obtiene un número de seis cifras que es múltiplo del que se obtendría escribiendo un 1 hacia su izquierda. (Se excluye la solución trivial 11111.)

Solución.

$$\begin{aligned}
 \underline{abcde}1 &= k \cdot 1\underline{abcde} \\
 a10^5 + b10^4 + c10^3 + d10^2 + e10 + 1 &= k(10^5 + a10^4 + b10^3 + c10^2 + d10 + e) \\
 (10 - k)(10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e) &= k10^5 - 1 \\
 \underline{abcde} &= \frac{k10^5 - 1}{10 - k} = \frac{999999}{10 - k} - 100000
 \end{aligned}$$

Debe ser $999999 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = \overline{10 - k}$, esto es $k = 1, k = 3, k = 7, k = 9$.

Para $k = 1$, $\underline{abcde} = 11111$, la solución trivial.

Para $k = 3$, $\underline{abcde} = \textcolor{red}{42857}$, solución válida.

Para $k = 7$, $\underline{abcde} = 233333$, tiene 6 cifras.

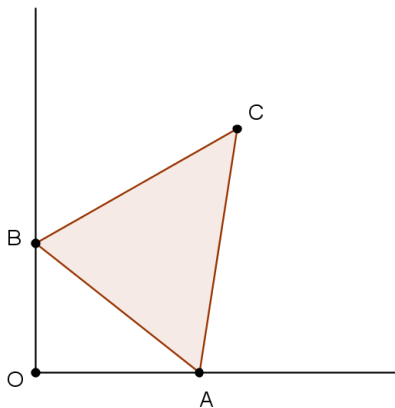
Para $k = 9$, $\underline{abcde} = 899999$, tiene 6 cifras.

89. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de una circunferencia de radio r que pasan por un punto exterior que está situado a una distancia $2r$ del centro de la circunferencia.

Solución.

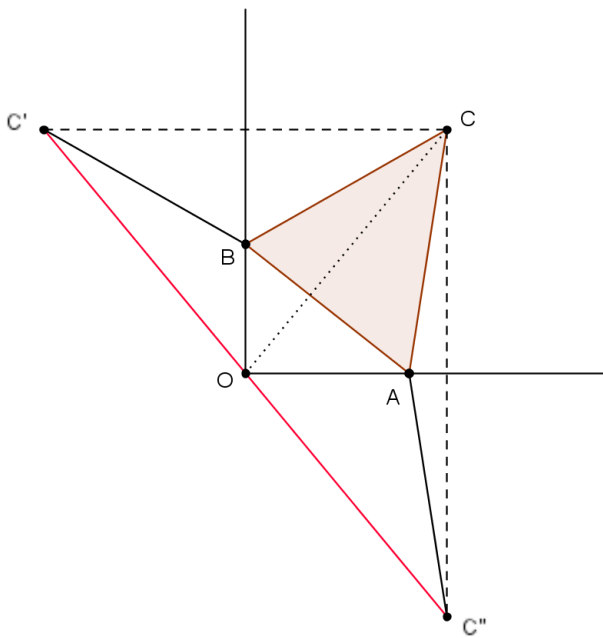
Pongamos que la circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$, de centro O , y el punto exterior es $P(2r, 0)$.

- 91.** Un punto C se encuentra dentro de la región limitada por un ángulo recto de vértice O , y los puntos A y B están uno en cada uno de sus lados, como se ve en la figura. Demuestra que el perímetro del $\triangle ABC$ es mayor o igual que el doble de la distancia OC .



Solución.

Sean C' y C'' los puntos simétricos del punto C respecto de los lados del ángulo recto:



Se tiene

$$CA + AB + BC = C'A + AB + BC'' \geq C'C'' = 2 \cdot OC.$$