

- 70.** Demuestra que si un lado de un triángulo es menor que la media aritmética de los otros dos lados, entonces el ángulo opuesto a ese lado es menor que la media aritmética de los otros dos ángulos.

Solución.

Denotemos el triángulo por ABC . Como $A + B + C = 180^\circ$, probar que $A < \frac{B+C}{2}$ equivale a probar que $A < \frac{180^\circ - A}{2}$, o que $A < 60^\circ$, lo que a su vez, es equivalente a probar que $\cos A > \frac{1}{2}$, lo que sugiere usar el teorema del coseno.

Denominando como es usual con las letras minúsculas correspondientes a las longitudes de los lados del triángulo, por hipótesis es $b + c > 2a$. Elevando al cuadrado y aplicando el teorema del coseno se obtiene

$$b^2 + 2bc + c^2 > 4(b^2 + c^2 - 2bc \cos A),$$

o bien,

$$8bc \cos A > 3b^2 + 3c^2 - 2bc.$$

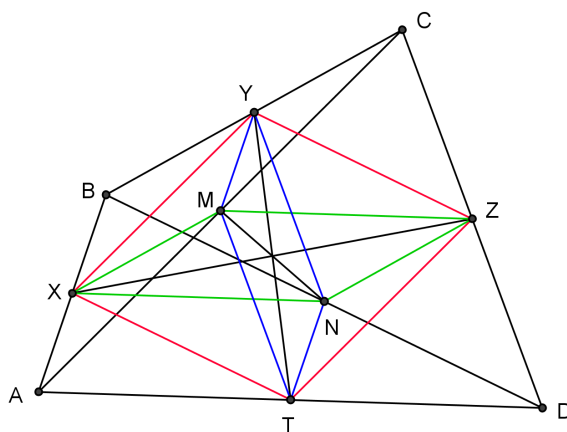
Restando $4bc$ de ambos lados de la desigualdad, resulta

$$4bc(2 \cos A - 1) > 3(b - c)^2 \geq 0.$$

Luego $\cos A > \frac{1}{2}$.

- 71.** Prueba que en un cuadrilátero cualquiera, la suma de los cuadrados de los lados excede a la suma de los cuadrados de las diagonales en el cuadrado del doble del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

Solución.



En un paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los cuatro lados (*ley del paralelogramo*).

Con la notación de la figura, donde X, Y, Z, T son los puntos medios de los lados y M, N los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$, el resultado del problema

se sigue de aplicar la ley del paralelogramo sucesivamente a los paralelogramos (teorema de Varignon) $XYZT$, $XMZN$ y $MYNT$ y combinar las igualdades obtenidas de modo que se eliminen XZ^2 e YT^2 .

- 72.** Demuestra que si n es un entero mayor que 1, entonces el número $n^{n-1} - 1$ es divisible por $(n-1)^2$.

Solución.

En primer lugar podemos observar que

$$\frac{n^{n-1} - 1}{n - 1} = n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1.$$

Podemos concebir esta suma como el resultado que se obtiene cuando hacemos $x = n - 1$ en el polinomio

$$P(x) = (1 + x)^{n-2} + (1 + x)^{n-3} + \dots + n(1 + x) + 1.$$

En el desarrollo de $P(x)$ en potencias de x (usamos la fórmula del binomio) el término independiente de x es $P(0) = n - 1$, y por lo tanto

$$P(x) = x \cdot q(x) + n - 1,$$

donde $q(x)$ es un polinomio en x de grado $n - 3$ y de coeficientes enteros. Ahora podemos poner nuevamente $x = n - 1$ y obtener finalmente:

$$\begin{aligned} n^{n-1} - 1 &= (n - 1)P(n - 1) \\ &= (n - 1)[(n - 1)q(n - 1) + n - 1] \\ &= (n - 1)^2[q(n - 1) + 1]. \end{aligned}$$

- 73.** Demuestra que si x, y son dos números irracionales tales que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, entonces las sucesiones $[x], [2x], \dots, [nx], \dots$ e $[y], [2y], \dots, [ny], \dots$ incluyen entre ambas a todos los números enteros positivos, y además exactamente una vez a cada uno. (La notación $[x]$ significa la *parte entera* de x , es decir, el mayor entero que es menor o igual que x .)

Solución. (Se conoce como Problema de Beatty)

Evidentemente es $x > 1$, de manera que los números $0, x, 2x, 3x, \dots$ difieren todos ellos en más de una unidad. Entonces los números enteros

$$[x], [2x], [3x], \dots \tag{1}$$

son todos positivos y distintos. Análogamente los números enteros

$$[y], [2y], [3y], \dots \tag{2}$$

son todos positivos y distintos.

Supongamos que algún entero p apareciera en ambas sucesiones (1) y (2). Entonces $p = [ax] = [by]$ con a y b enteros positivos. Luego se tiene $p < ax < p + 1$ y $p < by < p + 1$ (no podría ser $p = ax$ ni $p = by$ porque x y y son irracionales). De aquí se seguiría

$$p = \frac{p}{x} + \frac{p}{y} < a + b < \frac{p+1}{x} + \frac{p+1}{y} = p + 1,$$

y habríamos encontrado un entero $a + b$ comprendido entre los enteros consecutivos p y $p + 1$, lo que es imposible. Luego ningún entero positivo está a la vez en (1) y en (2).

Supongamos que quedase algún entero positivo p sin incluir en alguna de las sucesiones (1) o (2). Entonces podríamos encontrar enteros positivos a y b tales que

$$ax < p < p + 1 < (a + 1)x$$

y

$$by < p < p + 1 < (b + 1)y.$$

Se tendría entonces

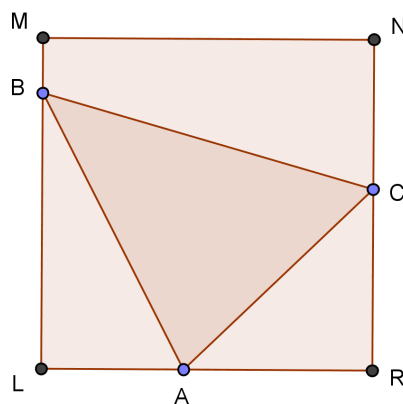
$$\frac{a}{p} + \frac{b}{p} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1,$$

de donde $a + b < p$. Y también, además,

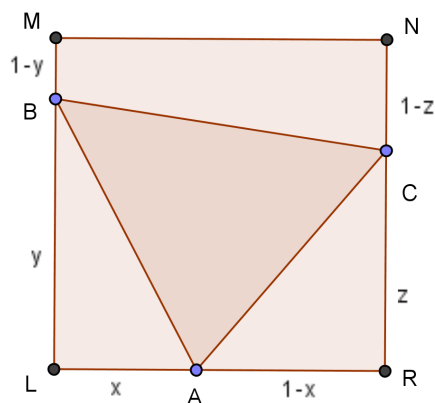
$$\frac{a + 1}{p + 1} + \frac{b + 1}{p + 1} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1,$$

de donde $a + b + 1 > p$, así que el entero p estaría comprendido entre los enteros consecutivos $a + b$ y $a + b + 1$, absurdo. Concluimos que la unión de las sucesiones disjuntas (1) y (2) es el conjunto completo de los enteros positivos.

- 74.** Sobre los lados de un cuadrado $LMNR$ de lado 1 tenemos (véase la figura) tres puntos A , B y C tales que los polígonos ALB , ARC y $BMNC$ tienen la misma área. Bajo estas condiciones, calcular los posibles valores máximo y mínimo del área del $\triangle ABC$.



Solución.



Con la notación de la figura, por hipótesis es $xy = z(1-x) = 2 - y - z$. A partir de este sistema se pueden despejar y y z en función de x , resultando

$$y = \frac{2(1-x)}{1+x-x^2}, \quad z = \frac{2x}{1+x-x^2}.$$

Entonces el área del $\triangle ABC$ es

$$S = 1 - \frac{3}{2}(2 - y - z) = \frac{3}{2}(y + z) - 2 = \frac{3}{1+x-x^2} - 2 = S(x),$$

donde en principio $x \in [0, 1]$. Para que sea $y \leq 1$ debe ser $x \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$. Para que sea $z \leq 1$ debe ser $x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, de manera que el intervalo donde se puede mover la x con sentido para el problema es $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

Derivando,

$$S'(x) = \frac{3(2x-1)}{(1+x-x^2)^2}.$$

Se tiene $S' = 0$ cuando $x = \frac{1}{2}$. Como $S\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = S\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{5}-5}{4} \approx 0.427$ y $S(1/2) = 2/5 = 0.4$, los valores máximo y mínimo de S son respectivamente $\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$ y $\frac{2}{5}$.

- 75.** Si se seleccionan siete números distintos de entre los números $1, 2, \dots, 126$, prueba que siempre habrá dos de los seleccionados, x, y , tales que $1 < \frac{y}{x} \leq 2$.

Solución. Considerar la partición del conjunto $B = \{1, 2, \dots, 126\}$ en los 7 subconjuntos siguientes:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1\} \\ B_2 &= \{2, 3\} \\ B_3 &= \{4, 5, 6, 7\} \\ B_4 &= \{8, 9, \dots, 15\} \\ B_5 &= \{16, 17, \dots, 31\} \\ B_6 &= \{32, 33, \dots, 63\} \\ B_7 &= \{64, 65, \dots, 126\} \end{aligned}$$

Si $x, y \in B_k$, $k = 2, 3, \dots, 6$ y es $x < y$, se cumple

$$1 < \frac{y}{x} \leq \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} < \frac{2^k}{2^{k-1}} = 2.$$

Si $x, y \in B_7$ y es $x < y$, se cumple

$$1 < \frac{y}{x} \leq \frac{126}{64} < 2.$$

Al tomar siete números distintos del conjunto B hay dos posibilidades:

- Que no hayamos tomado el 1; entonces son siete números de los conjuntos disjuntos $B_2, B_3, \dots, B_7$; habrá necesariamente dos números en el mismo B_k y se cumple la tesis por lo que hemos visto antes.
- Que uno de los siete números sea el 1. Entonces, para que entre los seis números restantes no haya dos en el mismo B_k , y para asegurar que los cocientes sucesivos sean mayores que 2, debemos tomar sucesivamente el 3, el 7, el 15, el 31, el 63, y el último, de B_7 , no podría ser más que el 126. Pero $1 < 126/63 = 2$, y se cumple también la propiedad que queremos.