Seminario de problemas-ESO. Curso 2011-12. Hoja 12

64. Tres números están en progresión aritmética, y otros tres números están en progresión geométrica. Sumando los términos correspondientes de estas dos progresiones se obtienen sucesivamente los números 85, 76 y 84, y sumando los tres términos de la progresión aritmética resulta 126. Encuentra los términos de ambas progresiones.

Solución.

Si los números en p. a. son $a-d$, a, $a+d$ y los números en p. g. son br^{-1}, b, br, se tienen las ecuaciones

$$\begin{cases} a-d+br^{-1} &= 85 \\ a+b &= 76 \\ a+d+br &= 84 \\ 3a &= 126. \end{cases}$$

La última da $a = 42$, entonces la segunda $b = 34$. Sumando las otras dos ecuaciones obtenemos

$$2a + b(r^{-1}+r) = 169.$$

Como conocemos ya a y b, se trata de una ecuación de segundo grado para r. Resultan las soluciones

$$r = 2,\ d = -26 \quad \text{o bien} \quad r = \frac{1}{2},\ d = 25.$$

Las progresiones son

$$\begin{array}{ccc} 68,\ \ 42,\ \ 16 & & 17,\ \ 42,\ \ 67 \\ & \text{o bien} & \\ 17,\ \ 34,\ \ 68 & & 68,\ \ 34,\ \ 17 \end{array}$$

65. Demuestra que todos los números de la sucesión 49, 4489, 444889, ..., obtenidos intercalando un 48 en el centro del número precedente, son cuadrados perfectos.

Solución.

$$\begin{aligned} 4 \overset{(k)}{\ldots} 48 \overset{(k-1)}{\ldots} 89 &= 4 \cdot 1 \overset{(k)}{\ldots} 1 \cdot 10^{k+1} + 8 \cdot 1 \overset{(k)}{\ldots} 1 + 1 \\ &= 4 \cdot \frac{10^{k+1}-1}{9} \cdot 10^{k+1} + 8 \cdot \frac{10^{k+1}-1}{9} + 1 \\ &= 4 \cdot \frac{10^{k+1}-1}{9} \cdot (10^{k+1}+1+1) + 1 \\ &= 4 \cdot \frac{10^{2(k+1)}-1}{9} + 4 \cdot \frac{10^{k+1}-1}{9} + 1 \\ &= 4 \cdot \frac{10^{2(k+1)}}{9} + 4 \cdot \frac{10^{k+1}}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot 10^{k+1} + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 10^{k+1}+1}{3}\right)^2, \end{aligned}$$

y este es el cuadrado de un número entero, ya que

$$\frac{2 \cdot 10^{k+1}+1}{3} = 1 + \frac{6(10^{k+1}-1)}{9} = 6 \overset{(k-1)}{\ldots} 67.$$

66. Los números a, b, c y d son cuatro enteros distintos tales que la ecuación

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-4=0$$

tiene una raíz entera r. Prueba que $r=(a+b+c+d)/4$.

Solución.

Como r es una raíz,

$$(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)=4,$$

y como a, b, c, d son enteros distintos, $r-a$, $r-b$, $r-c$ y $r-d$ son enteros distintos cuyo producto es igual a 4. Pero el único conjunto de cuatro enteros distintos cuyo producto es 4 es el conjunto $\{1,-1,2,-2\}$. Por lo tanto

$$(r-a)+(r-b)+(r-c)+(r-d)=1-1+2-2=0,$$

y entonces

$$4r=a+b+c+d.$$

67. Consideramos una primera esfera de radio r_1. En torno a esta esfera se circunscribe un tetraedro regular. En torno a este tetraedro se circunscribe una esfera de radio r_2. En torno a esta segunda esfera se circunscribe un cubo. En torno a este cubo se circunscribe una tercera esfera de radio r_3. Encontrar las razones $r_1\colon r_2\colon r_3$ (que debieran ser, de acuerdo con Kepler, las razones de las distancias medias al Sol de los planetas Marte, Júpiter y Saturno, aunque de hecho son bastante diferentes de las razones verdaderas).

Solución.

En el tetraedro regular, si la arista es a, la altura es $h=a\sqrt{6}/3=r_1+r_2$. Por otra parte, $r_2^2-r_1^2=a^2/3$, y se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} r_2-r_1=\frac{a\sqrt{6}}{6} \\ r_2+r_1=\frac{a\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

cuya solución es $r_1=a\sqrt{6}/12$ y $r_2=a\sqrt{6}/4$. Luego $r_1\colon r_2=1\colon 3$.

En el cubo, si la arista es b, entonces $r_2=b/2$ y $r_3=b\sqrt{3}/2$. Luego $r_2\colon r_3=1\colon\sqrt{3}$ y finalmente

$$r_1\colon r_2\colon r_3=1\colon 3\colon 3\sqrt{3}.$$

68. ¿Cuántos números primos hay entre los enteros positivos que se escriben en base 10 alternando unos y ceros?

Solución.

Solamente hay un número primo de esa forma, que es el 101. Para demostrarlo, supongamos que $N=101\ldots0101$ con k unos, para algún $k\geq 2$. Entonces

$$99N=9999\ldots9999=10^{2k}-1=(10^k+1)(10^k-1).$$

Si N es primo, entonces N divide a 10^k+1 o a 10^k-1, y por lo tanto uno de los números

$$\frac{99}{10^k-1}=\frac{10^k+1}{N} \quad \text{o} \quad \frac{99}{10^k+1}=\frac{10^k-1}{N}$$

es entero. Si $k>2$, los dos números 10^k-1 y 10^k+1 son mayores que 99, y llegamos a una contradicción. Luego $k=2$ y $N=101$ (que es primo).

69. Se considera el polinomio $p(x) = x^3+6x^2+11x+6$. Prueba que para todo número natural $n > 2$ se verifica que $p(n)$ es un múltiplo de 6, es decir, $p(n) = 6h$, y además el número $h+1$ no es primo.

Solución.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 - x + 6x^2 + 12x + 6 \\ &= x(x+1)(x-1) + 6x^2 + 12x + 6 = 6h \end{aligned}$$

pues un producto de tres números enteros consecutivos es múltiplo de 3 y de 2.

$$\begin{aligned} h+1 &= \frac{x(x-1)(x+1)}{6} + x^2 + 2x + 2 \\ &= \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 12}{6} = \frac{(x+4)(x^2+2x+3)}{6}\,. \end{aligned}$$

Si $x > 2$, el factor $x+4$ es mayor que 6.

- Si $x+4 = 6a$, se tiene que $a > 1$ y entonces $h+1 = a(x^2+2x+3)$ es un número compuesto.
- Si $x+4 \neq \dot{6}$, el número $h+1$ es claramente compuesto.