Seminario de problemas. Curso 2011-12. Hoja 1

1. En la estación central de una red ferroviaria se venden tantos billetes distintos como estaciones a las que se puede ir desde una estación determinada de la red o estaciones desde las que se puede ir a ella (el billete de A a B es distinto que el de B a A). Se inaugura una línea nueva con varias estaciones nuevas y eso obliga a imprimir 34 nuevos billetes distintos. ¿Cuántas estaciones había en la red, y cuántas hay en la línea nueva?

Solución.

Si había E estaciones en la red, el número de billetes distintos que se podían vender era $E(E-1)$. Si son N las nuevas estaciones, son $(E+N)(E+N-1)$ los billetes que se pueden vender después de la inauguración de la nueva línea. Entonces,

$$34 = (E+N)(E+N-1) - E(E-1) = N(2E+N-1).$$

Los números N y $2E+N-1$ son naturales, $N < 2E+N-1$, y 34 sólo se puede descomponer en producto de dos números naturales de dos maneras: $34 = 1 \cdot 34$ o $34 = 2 \cdot 17$. En el primer caso, $N = 1$ y $E = 17$. Como se dice que la nueva línea tiene "varias" estaciones, esta posibilidad no sirve. Entonces, $N = 2$ y resulta $E = 8$. Había ocho estaciones y se ha inaugurado una línea con dos estaciones.

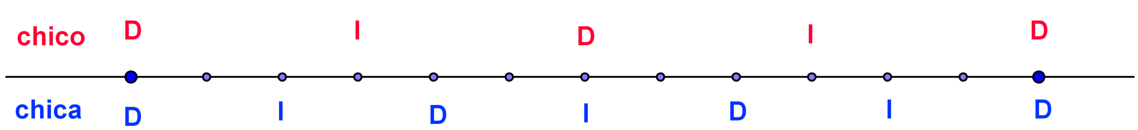
2. Una chica y un chico van paseando juntos. El chico da dos pasos al tiempo que la chica da tres. En un cierto instante ambos pisan con el pie derecho. ¿Al cabo de cuántos pasos del chico pisan por primera vez ambos al mismo tiempo con el pie izquierdo?

Solución.

Con un cambio de escala en el tiempo, que claramente no importa para el problema, podemos hacerles caminar de modo que:

El chico da 2 pasos en 6 segundos, es decir, 1 paso en 3 segundos. La chica da 3 pasos en 6 segundos, es decir, 1 paso en 2 segundos.

Podemos señalar en un eje de tiempos el pie que cada uno pone en el suelo, como se ve a continuación:



Entonces, al cabo de 12 segundos están en la misma situación que al comienzo, y no han puesto nunca el pie izquierdo al mismo tiempo en el suelo. Queda así claro que nunca lo van a poner.

3. Observa:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 &= 24 = 5^2 - 1; \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 &= 120 = 11^2 - 1; \\ 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 &= 360 = 19^2 - 1. \end{aligned}$$

¿Será verdad que el producto de cuatro enteros consecutivos es siempre un cuadrado perfecto menos 1? Y, si es verdad, ¿el cuadrado de qué número resulta ahí?

Solución.

Extendamos un poco más la tabla:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 &= 24 = 25 - 1 = 5^2 - 1 \\
2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 &= 120 = 121 - 1 = 11^2 - 1 \\
3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 &= 360 = 361 - 1 = 19^2 - 1 \\
4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 &= 840 = 841 - 1 = 29^2 - 1 \\
5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 &= 1680 = 1681 - 1 = 41^2 - 1
\end{aligned}
$$

Puede saltar a la vista que la respuesta a la pregunta ¿el cuadrado de qué número resulta ahí? es: el que resulta de multiplicar los dos números de enmedio y restar 1, o bien, de multiplicar los dos números de los extremos y sumar 1, es decir, se puede llegar a conjeturar las fórmulas

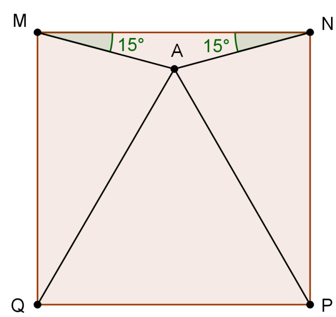
$$n(n+1)(n+2)(n+3) = ((n+1)(n+2)-1)^2 - 1 = (n(n+3)+1)^2 - 1,$$

que se pueden comprobar directamente echando las cuentas.

Nota. También se podría generalizar el problema a cuatro números en progresión aritmética:

$$n(n+d)(n+2d)(n+3d) = ((n+d)(n+2d)-d^2)^2 - d^4.$$

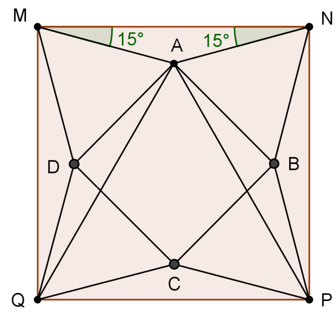
4. En un cuadrado $MNPQ$ se traza el punto A como indica la figura:



El triángulo APQ tiene toda la pinta de ser equilátero. ¿Lo es de verdad?

Solución.

Levantando el mismo triángulo isósceles sobre los otros tres lados del cuadrado obtenemos los puntos B, C y D.

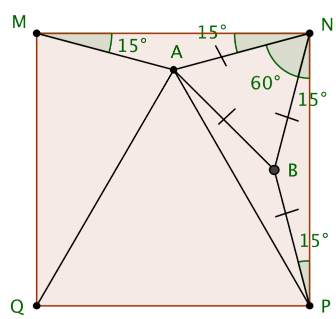


Por la simetría del cuadrado, $NA = NB$ y $\angle ANB = 60°$, etc., luego los cuatro triángulos en las esquinas como el $\triangle ANB$ son equiláteros. Por lo tanto $ABCD$ es un cuadrado.

Entonces los triángulos PBA y QDA son iguales al $\triangle PCQ$. Luego el $\triangle QAP$ es equilátero.

Otra solución.

Levantando el mismo triángulo isósceles sobre el lado NP del cuadrado obtenemos el punto B.



Se tiene que $\angle ANB = 60°$, y por tanto $\triangle ANB$ es equilátero (isósceles con ángulo de 60° en lados iguales). Además

$$\angle NBP = 180° - 2 \cdot 15° = 150°$$
$$\angle ABP = 360° - (60° + 150°) = 150°,$$

con lo que $\triangle ABP \equiv \triangle BNP$ (dos lados iguales e igual el ángulo que forman). Luego $AP = NP = l$ (l =lado del cuadrado). Además $\angle APB = 15°$, por lo que $\angle QPA = 60°$. Por tanto, se tiene que

$$AP = QP$$
$$\angle QPA = 60°,$$

con lo que $\triangle QPA$ es equilátero.

5. ¿Cuántos rectángulos de lados paralelos a los lados del tablero hay en un tablero de ajedrez?

Solución.

Para contar cuántos rectángulos hay de tamaño $p \times q$ puedes pensar que has cortado uno de cartón de esas dimensiones y que miras de cuántas maneras lo puedes colocar con sus lados coincidiendo con líneas del tablero. Una cuenta ordenada te da la tabla siguiente:

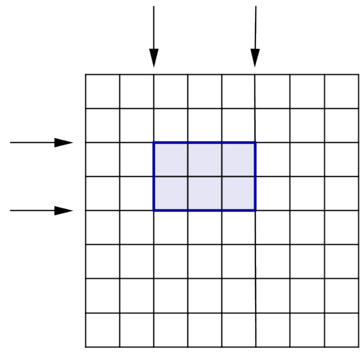
Tamaño del rectángulo	**Número de rectángulos**
8×8	1
7×8	2
6×8	3
$\dots$	$\dots$
2×8	7
1×8	8
	Suma parcial: $8 \cdot 9/2 = 36$
8×7	$1 \cdot 2$
7×7	$2 \cdot 2$
6×7	$3 \cdot 2$
$\dots$	$\dots$
2×7	$7 \cdot 2$
1×7	$8 \cdot 2$
	Suma parcial: $(8 \cdot 9/2) \cdot 2 = 36 \cdot 2$
$\dots$	$\dots$
$8 \times (8-h)$	$1 \cdot (h+1)$
$7 \times (8-h)$	$2 \cdot (h+1)$
$6 \times (8-h)$	$3 \cdot (h+1)$
$\dots$	$\dots$
$2 \times (8-h)$	$7 \cdot (h+1)$
$1 \times (8-h)$	$8 \cdot (h+1)$
	Suma parcial: $(8 \cdot 9/2) \cdot (h+1) = 36 \cdot (h+1)$
$\dots$	$\dots$
	Suma total: $36 \cdot (1 + 2 + \cdots + 8) = 36 \cdot 36 = \mathbf{1296}$

Nota. Generalización al número $\boldsymbol{N}$ de rectángulos en un tablero de tamaño $m \times n$:

$$\boldsymbol{N} = m(m+1)n(n+1)/4.$$

Otra solución.

La determinación de un rectángulo en el tablero de ajedrez depende de la elección que hagamos de dos columnas y dos filas del tablero.



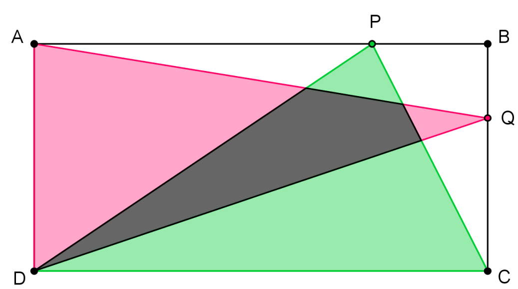
De este modo, la cantidad de parejas de columnas posibles que se pueden elegir son $\frac{9\cdot 8}{2}$, o lo que es lo mismo, el número combinatorio $\binom{9}{2}$. De igual manera, las parejas de filas son también $\binom{9}{2}$. Por tanto, el número de rectángulos que se pueden formar son

$$\binom{9}{2}\cdot\binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2}\cdot\frac{9\cdot 8}{2} = 1296.$$

En general, para hallar el número de rectángulos en un tablero de tamaño $m\times n$ es:

$$\binom{m}{2}\cdot\binom{n}{2} = m(m+1)n(n+1)/4.$$

6. $ABCD$ es el suelo de una habitación rectangular donde se han colocado dos alfombras triangulares, una rosa y otra verde, como se indica en la figura.



Si el área total no cubierta por alfombras (zona blanca en la figura) es de 4.2 m^2, ¿cuánto mide el área del cuadrilátero intersección de las alfombras (la zona gris en la figura)?

Solución.

Si el área del rectángulo $ABCD$ es T, el área de la alfombra rosa es A_r y el área de la alfombra verde es A_v, lo primero que podemos ver es que

$$A_r = A_v = T/2.$$

Ahora, llamando B al área blanca, R al área rosa y G al área gris, se tiene

$$A_r = R + G = T/2 = T - A_v = R + B.$$

Por lo tanto, $G = B = 4.2$ m^2.