

Seminario de problemas-Bachillerato. Curso 2011-12. Hoja 6

31. Un bidón cilíndrico, con una masa en vacío M , contiene una masa m_0 de aceite cuando está lleno. El centro de masas (o de gravedad, o baricentro) del bidón lleno está en el punto medio central. Al empezar a vaciar el bidón el centro de masas baja, pero cuando el bidón está vacío, el centro de masas ha vuelto a subir al punto medio central. ¿Qué masa de aceite hay en el bidón cuando el centro de masas alcanza su punto más bajo?

32. Sea n un entero positivo dado. ¿Cuántas soluciones en pares ordenados (x, y) de enteros positivos tiene la ecuación

$$\frac{xy}{x+y} = n ?$$

33. Sea $a(n)$ el número de representaciones del entero positivo n como suma de unos y doses teniendo en cuenta el orden. Por ejemplo, $a(4) = 5$ porque

$$4 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Sea $b(n)$ el número de representaciones del entero positivo n como suma de enteros mayores que 1, nuevamente teniendo en cuenta el orden y contando la representación de único sumando n . Por ejemplo, $b(6) = 5$, ya que

$$6 = 4 + 2 = 2 + 4 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2.$$

Probar que, para todo n , $a(n) = b(n + 2)$.

34. Prueba que dados tres puntos en el interior de un cuadrado de lado 1, hay al menos dos de ellos a menos de $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ unidades de distancia.
35. El octógono $P_1P_2 \dots P_8$ está inscrito en un círculo, con sus vértices en ese orden a lo largo de la circunferencia. Suponiendo que el polígono $P_1P_3P_5P_7$ es un cuadrado de área 5 y que el polígono $P_2P_4P_6P_8$ es un rectángulo de área 4, halla el máximo valor posible del área del octógono.
36. $ABCD$ es un cuadrado en el plano. $A'B'C'D'$ es otro cuadrado en el plano, recorrido en el mismo sentido. Los puntos M, N, P y Q son los puntos medios de AA', BB', CC' y DD' , respectivamente. Parece que $MNPQ$ es otro cuadrado. ¿Lo es de verdad? ¿Por qué?

