Seminario de problemas-Bachillerato. Curso 2011-12. Hoja 4

19. En el parlamento de Sikinia cada miembro tiene a lo sumo tres enemigos entre los restantes miembros. Probar que se puede dividir el parlamento en dos salas de manera que cada miembro tenga a los sumo un enemigo en su sala.

20. Se dan $2n$ puntos en el plano sin que haya tres que estén alineados. Exactamente n de estos puntos son granjas. Los restantes n puntos son pozos. A cada granja le asignamos un pozo y los unimos mediante un camino en línea recta. Demostrar que se pueden construir estos caminos de forma que no se intersequen.

21. Sean a, b, c y S, respectivamente, las longitudes de los lados y el área de un triángulo acutángulo ABC. Demuestra que P es un punto interior del triángulo ABC tal que

$$a\,PA + b\,PB + c\,PC = 4S,$$

si y sólo si P es el ortocentro del triángulo ABC.

22. Prueba que todo número entre 1 y $n!$ ($n \geq 1$ entero) puede ser escrito como suma de a lo sumo n divisores distintos de $n!$. Es decir, dado m tal que $1 \leq m \leq n!$, existen ℓ números $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$ distintos ($1 \leq \ell \leq n$) tales que $k_j \mid n!$ para todo $1 \leq j \leq \ell$ y

$$m = k_1 + k_2, \ldots + k_\ell.$$

23. Para cualquier conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de cuatro enteros positivos distintos, se denota la suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ por s_A. Sea n_A el número de pares (i, j) con $1 \leq i < j \leq 4$ para los cuales $a_i + a_j$ divide a s_A. Encontrar todos los conjuntos A de cuatro enteros positivos distintos para los cuales se alcanza el mayor valor posible de n_A.

24. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las raíces del polinomio $P(t) = t^n + t^{n-1} + \ldots + t + 1$. Hallar

$$\sigma = \frac{1}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_2} + \ldots + \frac{1}{1-a_n}.$$