

109. Determina los números primos p para los que se cumple que $2^p + p^2$ es primo.

110. Encuentra una expresión sin puntos suspensivos para la siguiente suma S_n :

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{n \text{ unos}}.$$

111. Dos hermanos venden un rebaño de cabras, consiguiendo por cierto por cada cabra tantos euros como cabras había en el rebaño, y deciden repartirse equitativamente el dinero obtenido. El hermano mayor empieza “10 euros para mí, 10 euros para tí”, y repite esta distribución unas cuantas veces más. Al final, cuando el mayor toma 10 euros para él, resulta que quedan ya menos de 10 euros para el hermano pequeño. “No importa, —le dice, quédate con lo que queda, además yo te doy este llaverito que tanto te gustaba y que acabo de comprar y así estamos en paz”. ¿Cuánto costaba el llaverito?

¿Podríamos saber cuánto costaba el llaverito si el hermano mayor hubiese organizado el reparto con la fórmula “7 euros para mí, 7 euros para tí”?

112. Prueba que la igualdad

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

113. Un polígono de un número impar de lados está inscrito en una circunferencia. Demuestra que si los ángulos interiores del polígono son iguales, el polígono es regular.

114. Hay un cofre repleto de monedas de oro enterrado en algún punto de una isla. Has encontrado un documento que contiene las siguientes instrucciones: “Camina en línea recta desde la gran piedra blanca hacia el abedul contando tus pasos. Al llegar al abedul, gira 90° hacia tu derecha y camina ese mismo número de pasos. Así habrás llegado al punto M . Vuelve a la gran piedra blanca, y ahora camina en línea recta hacia el roble contando los pasos. Al llegar al roble, gira 90° hacia tu izquierda y camina otros tantos pasos. Estarás en el punto N . El cofre está enterrado exactamente en el punto medio del segmento MN .” Con semejante documento en tu poder, has decidido naturalmente probar fortuna. Así que finalmente has llegado a la isla, y has identificado rápidamente el abedul y el roble. Pero ni el menor rastro de esa gran piedra blanca desde la que se verían los dos árboles. Empiezas a notar cierto desasosiego entre los marineros del barco que te ha llevado a la isla que te hace temer lo peor. ¿Podrías hacer aún algo para salvar el pellejo?