Seminario de problemas-Bachillerato. Curso 2011-12. Hoja 13

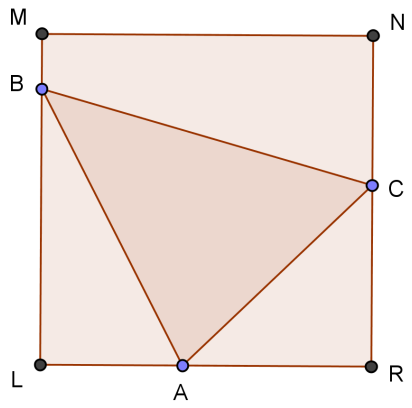
70. Demuestra que si un lado de un triángulo es menor que la media aritmética de los otros dos lados, entonces el ángulo opuesto a ese lado es menor que la media aritmética de los otros dos ángulos.

71. Prueba que en un cuadrilátero cualquiera, la suma de los cuadrados de los lados excede a la suma de los cuadrados de las diagonales en el cuadrado del doble del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

72. Demuestra que si n es un entero mayor que 1, entonces el número $n^{n-1}-1$ es divisible por $(n-1)^2$.

73. Demuestra que si x, y son dos números irracionales tales que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$, entonces las sucesiones $[x]$, $[2x]$, ..., $[nx]$, ... e $[y]$, $[2y]$, ..., $[ny]$, ... incluyen entre ambas a todos los números enteros positivos, y además exactamente una vez a cada uno. (La notación $[x]$ significa la *parte entera* de x, es decir, el mayor entero que es menor o igual que x.)

74. Sobre los lados de un cuadrado $LMNR$ de lado 1 tenemos (véase la figura) tres puntos A, B y C tales que los polígonos ALB, ARC y $BMNC$ tienen la misma área. Bajo estas condiciones, calcular los posibles valores máximo y mínimo del área del $\triangle ABC$.



75. Si se seleccionan siete números distintos de entre los números 1, 2, ..., 126, prueba que siempre habrá dos de los seleccionados, x, y, tales que $1<\frac{y}{x}\leq 2$.