

## Seminario de problemas-ESO. Curso 2011-12. Hoja 12

---

- 64.** Tres números están en progresión aritmética, y otros tres números están en progresión geométrica. Sumando los términos correspondientes de estas dos progresiones se obtienen sucesivamente los números 85, 76 y 84, y sumando los tres términos de la progresión aritmética resulta 126. Encuentra los términos de ambas progresiones.
- 65.** Demuestra que todos los números de la sucesión 49, 4489, 444889, ..., obtenidos intercalando un 48 en el centro del número precedente, son cuadrados perfectos.
- 66.** Los números  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son cuatro enteros distintos tales que la ecuación

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + 4 = 0$$

tiene una raíz entera  $r$ . Prueba que  $r = (a + b + c + d)/4$ .

- 67.** Consideramos una primera esfera de radio  $r_1$ . En torno a esta esfera se circunscribe un tetraedro regular. En torno a este tetraedro se circunscribe una esfera de radio  $r_2$ . En torno a esta segunda esfera se circunscribe un cubo. En torno a este cubo se circunscribe una tercera esfera de radio  $r_3$ . Encontrar las razones  $r_1 : r_2 : r_3$  (que debieran ser, de acuerdo con Kepler, las razones de las distancias medias al Sol de los planetas Marte, Júpiter y Saturno, aunque de hecho son bastante diferentes de las razones verdaderas).
- 68.** ¿Cuántos números primos hay entre los enteros positivos que se escriben en base 10 alternando unos y ceros?
- 69.** Se considera el polinomio  $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ . Prueba que para todo número natural  $n > 2$  se verifica que  $p(n)$  es un múltiplo de 6, es decir,  $p(n) = 6h$ , y además el número  $h + 1$  no es primo.