Curso 2010-11

Problema 38. *Tenemos un cubo de madera de cerezo, compuesto por 27 cubitos iguales: el cubito interior, 8 "cubitos-vértice", 12 "cubitos-arista" y 6 "cubitos-cara". Y una termita que pretende llegar lo más rápido posible al centro del cubito interior pasando antes por los centros de los otros 26 cubitos, entrando al cubo por el centro de la cara exterior de un "cubito-cara" y recorriendo un camino que esté compuesto por tramos rectilíneos paralelos siempre a las aristas del cubo. ¿Logrará la termita su propósito?*

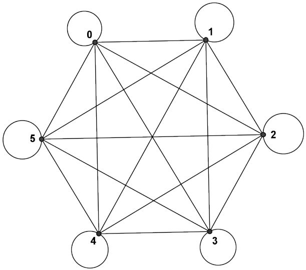
Problema 38. *Tenemos un cubo de madera de cerezo, compuesto por 27 cubitos iguales: el cubito interior, 8 "cubitos-vértice", 12 "cubitos-arista" y 6 "cubitos-cara". Y una termita que pretende llegar lo más rápido posible al centro del cubito interior pasando antes por los centros de los otros 26 cubitos, entrando al cubo por el centro de la cara exterior de un "cubito-cara" y recorriendo un camino que esté compuesto por tramos rectilíneos paralelos siempre a las aristas del cubo. ¿Logrará la termita su propósito?*

Podemos pensar en una coloración alternada con colores blanco y negro de los 27 cubitos que forman el cubo grande de manera que, por ejemplo, los 6 "cubitos-cara" sean negros. El cubito interior, rodeado completamente por ellos, será blanco. Dadas las condiciones impuestas, el camino de la termita pasando por los distintos cubitos quedará descrito por una secuencia alternada $NBNB \dots NB$ donde habrá tantas N como B. Pero hay 27 cubitos, y el número 27 es impar. Luego el recorrido propuesto es imposible.

Problema 39. *Quitando los "seises", un juego de dominó tiene 21 fichas, desde "blanca doble" a "cinco doble". ¿Se pueden colocar esas 21 fichas sobre la mesa una tras otra siguiendo la regla de emparejamiento del dominó?*

Problema 39. *Quitando los "seises", un juego de dominó tiene 21 fichas, desde "blanca doble" a "cinco doble". ¿Se pueden colocar esas 21 fichas sobre la mesa una tras otra siguiendo la regla de emparejamiento del dominó?*

Las 21 fichas del dominó sin "seises" pueden quedar representadas por las *aristas* del siguiente *grafo* de seis *vértices*:



Por ejemplo, la ficha 1—3 queda representada por la arista 1—3 y la ficha 2—2 por la arista en forma de bucle en el vértice 2.

Una colocación de las 21 fichas en la mesa corresponde a un recorrido *euleriano* por el grafo, es decir, un recorrido sin saltos que recorra todas las aristas y una sola vez cada una. Tal recorrido es imposible (*Teorema de Euler*) cuando el grafo tiene más de dos vértices "impares" (es decir, vértices adonde llega un número impar de aristas).
En nuestro grafo hay 6 vértices impares (en la cuenta, las aristas en forma de bucle valen por 0, o por 2), con lo que un recorrido euleriano es imposible. Luego la colocación de las 21 fichas seguidas es imposible (es posible, en cambio, la colocación consecutiva de las 27 fichas del dominó, e incluso en forma circular, porque en ese caso los siete vértices del grafo asociado son "pares").

Problema 40. *Probar que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{n(n+2)}{n+1}.$

Problema 40. *Probar que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{n(n+2)}{n+1}$.

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} &= \frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}\\ &= \frac{k^4+2k^3+3k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}\\ &= \frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}\,.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k+1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right) \\
&= n+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\
&= n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Problema 41. *(a) Demuestra que, en toda reunión de 6 personas hay, o bien tres que son mutuamente conocidas, o bien tres que se ven por primera vez. Dicho de otro modo: se trazan todos los lados y las diagonales de un hexágono y se pinta, cada uno de los segmentos trazados, de color rojo o de color verde. Demuestra que, se haga como se haga, siempre habrá un triángulo "monocromático", es decir, un triángulo con los tres lados pintados del mismo color.*
(b) Se trazan todos los lados y las diagonales de un polígono de 17 lados y se pinta, cada uno de los segmentos trazados, de rojo, azul o verde. Demuestra que, se haga como se haga, deberá haber un triángulo monocromático.

Problema 41. *(a) Demuestra que, en toda reunión de 6 personas hay, o bien tres que son mutuamente conocidas, o bien tres que se ven por primera vez. Dicho de otro modo: se trazan todos los lados y las diagonales de un hexágono y se pinta, cada uno de los segmentos trazados, de color rojo o de color verde. Demuestra que, se haga como se haga, siempre habrá un triángulo "monocromático", es decir, un triángulo con los tres lados pintados del mismo color.*
(b) Se trazan todos los lados y las diagonales de un polígono de 17 lados y se pinta, cada uno de los segmentos trazados, de rojo, azul o verde. Demuestra que, se haga como se haga, deberá haber un triángulo monocromático.

(a) Nos fijamos en una persona, llamémosla A, y consideramos la relación de ella o él con las otras cinco, llamémoslas B, C, D, E y F. Por el principio del palomar, A debe conocer al menos a tres de éstas, o no conocer al menos a tres de éstas. Supongamos, por ejemplo, que A ya conoce a C, a E y a F.

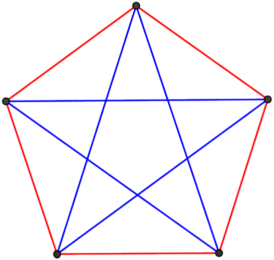
Si algún par de éstas, por ejemplo las personas C y F, se conocen, entonces A, C y F son tres personas que se conocen mutuamente. Si ningún par de entre esas personas C, E y F se conocen, éstas son tres personas que se ven por primera vez. En el caso en que A vea por primera vez a tres de las otras cinco personas el argumento es idéntico al anterior. En cualquier caso se puede encontrar una terna de personas "monocromática".

(b) Nos fijamos en un vértice. Hay 16 segmentos que unen este vértice con los demás. Por el principio del palomar al menos uno de los colores está usado 6 veces en estos segmentos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que este color sea rojo. Supongamos que estos 6 segmentos rojos unen nuestro vértice elegido con los vértices a, b, c, d, e y f. Si algún par de vértices entre estos seis está unido con un segmento de color rojo, hemos terminado. Si no, entre los 6 puntos a, b, c, d, e y f sólo se usan dos colores, azul y verde, y estamos en la situación del apartado (a), debiendo contener este subgrafo un triángulo monocromático (azul o verde).

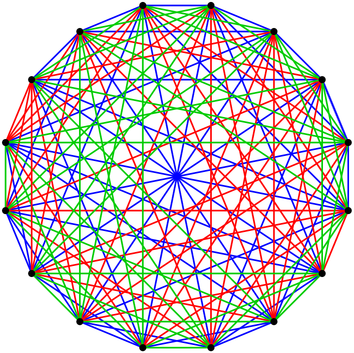
(Complemento al problema 41)

Teorema de Ramsey: Se colorean arbitrariamente las aristas del *grafo completo K_n de n vértices* de alguno de r colores distintos. Sea m un entero fijo. Entonces, para n suficientemente grande, el K_n r-coloreado contiene un K_m monocromático.

Por el resultado del apartado (a), para $r = 2$ y $m = 3$, el "n suficientemente grande" se reduce justamente a $n \geq 6$. Y no se puede rebajar, porque para $n = 5$ tenemos la siguiente bi-coloración de K_5 sin triángulos monocromáticos:



Y así, tenemos demostrado que el *número de Ramsey* $R(3,3) = 6$ (es decir, el mínimo n tal que en una bicoloración —azul, rojo por ejemplo— de K_n hay un triángulo azul o un triángulo rojo, es 6).
Por el resultado del apartado (b), para $r = 3$ y $m = 3$, el "n suficientemente grande" se reduce a $n \geq 17$. Y no se puede rebajar, porque para $n = 16$ tenemos la siguiente tri-coloración de K_{16} sin triángulos monocromáticos:



Y así, tenemos demostrado que el *número de Ramsey* $R(3,3,3) = 17$ (es decir, el mínimo n tal que en una tricoloración —azul, rojo, verde por ejemplo— de K_n hay un triángulo azul, un triángulo rojo, o un triángulo verde, es 17). Hoy día solamente se conocen unos pocos números de Ramsey.

Problema 42. *Sea* $p > 5$ *un número primo. Prueba que el número* $11\ldots1$ *formado por* $p-1$ *unos es múltiplo de* p*.*

Problema 42. *Sea $p > 5$ un número primo. Prueba que el número $11\ldots1$ formado por $p-1$ unos es múltiplo de p.*

Por el *pequeño teorema de Fermat* (si p es primo y a es primo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$), como 10 es primo con p, tenemos

$$10^{p-1} \equiv 1 \mod p,$$

esto es, existe un λ tal que $10^{p-1} = 1 + \lambda p$.
Ahora, usando la fórmula de la suma de las progresiones geométricas,

$$11 \overset{(p-1)\text{ unos}}{\ldots\ldots} 1 = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{p-2} = \frac{10^{p-1} - 1}{10 - 1} = \frac{1 + \lambda p - 1}{9} = \frac{\lambda p}{9}.$$

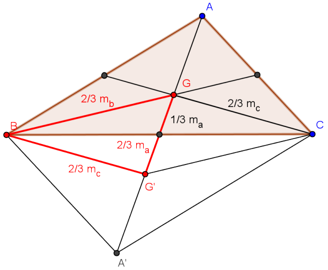
Como p es primo con 9 (lo anterior valdría para $p = 3$, pero se dice que $p > 5$) y $\dfrac{\lambda p}{9}$ es entero, debe ser $\lambda = 9\mu$, y entonces

$$11 \overset{(p-1) \text{ unos}}{\cdots\cdots} 1 = \frac{9\mu\, p}{9} = \mu p.$$

Problema 43. *Construir un triángulo (a) conocidas las longitudes de las tres medianas, (b) conocidas las longitudes de las tres alturas.*

Problema 43. *Construir un triángulo (a) conocidas las longitudes de las tres medianas, (b) conocidas las longitudes de las tres alturas.*

(a) Datos: m_a, m_b y m_c. Suponer el problema resuelto:

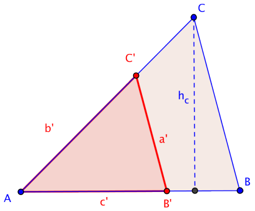


Así que basta construir el triángulo $BG'G$ de lados $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ y $\frac{2}{3}m_c$. A partir de él, se reconstruye fácilmente el triángulo ABC, empezando, por ejemplo, por completar el paralelogramo $BGCG'$.

(b) Sea S el área y a, b, c los lados del triángulo buscado, de modo que $2S = ah_a = bh_b = ch_c$.
Construimos un triángulo de lados h_a, h_b, h_c y denotamos su área por S' y por a', b', c' sus correspondientes alturas, de modo que $2S' = a'h_a = b'h_b = c'h_c$.
Por lo tanto,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

de modo que el triángulo de lados a', b', c' es *semejante* al triángulo buscado. El triángulo que buscamos se construye prolongando por ejemplo el lado AC' (figura) hasta un punto C tal que la distancia a la recta AB' sea h_c.



Problema 44. *Una figura plana se llama convexa si contiene completamente el segmento que une dos puntos cualquiera de la figura. Sean cuatro figuras convexas planas tales que cada tres de ellas tienen al menos un punto común. Probar que entonces las cuatro figuras tienen al menos un punto común.*

Problema 44. *Una figura plana se llama convexa si contiene completamente el segmento que une dos puntos cualquiera de la figura. Sean cuatro figuras convexas planas tales que cada tres de ellas tienen al menos un punto común. Probar que entonces las cuatro figuras tienen al menos un punto común.*

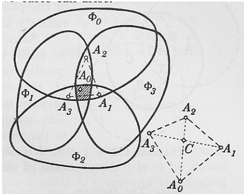


Diagram 151

Denotemos nuestras cuatro figuras convexas por Φ_0, Φ_1, Φ_2 y Φ_3. Consideremos puntos $A_0 \in \Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \Phi_3$, $A_1 \in \Phi_0 \cap \Phi_2 \cap \Phi_3$, $A_2 \in \Phi_0 \cap \Phi_1 \cap \Phi_3$ y $A_3 \in \Phi_0 \cap \Phi_1 \cap \Phi_2$. Como los puntos A_0, A_1 y A_2 pertenecen a Φ_3, todo el triángulo $A_0A_1A_2$ está contenido en Φ_3.

Del mismo modo, el triángulo $A_0A_1A_3$ está contenido en Φ_2, el triángulo $A_0A_2A_3$ está contenido en Φ_1 y el triángulo $A_1A_2A_3$ está contenido en Φ_0. Hay que tratar dos casos por separado:

1. Si uno de los puntos A_i es interior (o está en un lado) del triángulo que forman los otros tres puntos. Suponer, por ejemplo, que $A_0 \in \triangle A_1A_2A_3$. Entonces (ver el diagrama a), dicho punto A_0 pertenece a las cuatro figuras. Y esta argumentación sigue siendo válida incluso si el triángulo $A_1A_2A_3$ resulta ser un segmento (cuando, por ejemplo, A_2 estuviera en el segmento A_1A_3).
2. Si ninguno de los puntos A_i está en el triángulo que forman los otros tres. En este caso, los puntos A_0, A_1, A_2 y A_3 son vértices de un cuadrilátero convexo (ver el diagrama b), y el punto C de intersección de las diagonales de este cuadrilátero pertenece a los cuatro triángulos en consideración y por consiguiente a las cuatro figuras Φ_0, Φ_1, Φ_2 y Φ_3.