Curso 2010-11

Problema 31. *Probar que* $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ *es un múltiplo de 14 si* n *es un entero no negativo.*

Problema 31. *Probar que* $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ *es un múltiplo de 14 si* n *es un entero no negativo.*

Por ser suma de dos impares, el número $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ es múltiplo de 2 para todo $n \geq 0$. Además, usando la fórmula del binomio de Newton, para todo $n \geq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} 3^{4n+2} + 5^{2n+1} &= 9 \cdot 81^n + 5 \cdot 25^n \\ &= 9(11 \cdot 7 + 4)^n + 5(3 \cdot 7 + 4)^n = (9+5)4^n + \dot{7} = \dot{7}. \end{aligned}$$

Problema 32. *¿En qué cifra termina* $2007^{2011} + 2008^{2011} + 2009^{2011} + 2010^{2011}$*?*

Problema 32. *¿En qué cifra termina* $2007^{2011} + 2008^{2011} + 2009^{2011} + 2010^{2011}$*?*

$$\begin{array}{rcll} 7^0 & \equiv & 1 & \mod 10 \\ 7^1 & \equiv & 7 & \mod 10 \\ 7^2 & \equiv & 9 & \mod 10 \\ 7^3 & \equiv & 3 & \mod 10 \\ 7^4 & \equiv & 1 & \mod 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} 8^0 & \equiv & 1 & \mod 10 \\ 8^1 & \equiv & 8 & \mod 10 \\ 8^2 & \equiv & 4 & \mod 10 \\ 8^3 & \equiv & 2 & \mod 10 \\ 8^4 & \equiv & 6 & \mod 10 \\ 8^5 & \equiv & 8 & \mod 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} 9^0 & \equiv & 1 & \mod 10 \\ 9^1 & \equiv & 9 & \mod 10 \\ 9^2 & \equiv & 1 & \mod 10 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2007^{2011} + 2008^{2011} + 2009^{2011} + 2010^{2011} &\equiv 7^{2011} + 8^{2011} + 9^{2011} \\ &\equiv 3 + 2 + 9 \equiv 4 \mod 10. \end{aligned}$$

Problema 33. *En un "juego con sombreros" participa un equipo de 30 personas, a las que se dispone formando una fila de manera que cada una solamente pueda ver a todas las que tiene por delante suyo. A cada jugador se le pone un sombrero, negro o blanco y, empezando por el último de la fila y en orden hacia adelante, a cada uno se le pregunta el color de su sombrero; si acierta, el equipo gana un punto; si falla, el equipo no suma ni pierde puntos. ¿Qué estrategia podría seguir el equipo para ganar la mayor cantidad de puntos posible?*

Problema 33. *En un "juego con sombreros" participa un equipo de 30 personas, a las que se dispone formando una fila de manera que cada una solamente pueda ver a todas las que tiene por delante suyo. A cada jugador se le pone un sombrero, negro o blanco y, empezando por el último de la fila y en orden hacia adelante, a cada uno se le pregunta el color de su sombrero; si acierta, el equipo gana un punto; si falla, el equipo no suma ni pierde puntos. ¿Qué estrategia podría seguir el equipo para ganar la mayor cantidad de puntos posible?*

Se pueden obtener, al menos, 29 puntos; los jugadores se ponen de acuerdo en que el último de ellos diga que su sombrero es negro o blanco según sea, respectivamente, par o impar la cantidad de sombreros negros que tienen los que le preceden en la fila.

Si, por ejemplo, el último de la fila dice que su sombrero es negro, es porque ve delante suyo un número par de sombreros negros; entonces, según sea la paridad del número de sombreros negros que observa el penúltimo, él conocerá el color de su sombrero, y así sucesivamente hasta el primero de la fila inclusive.

Problema 34. *Letras distintas, dígitos distintos:*

$$\begin{array}{cccccccc}
 & P & A & C & I & F & I & C \\
 & & B & A & L & T & I & C \\
+ & & A & R & C & T & I & C \\
\hline
 & C & C & C & C & C & C & C
\end{array}$$

En $\frac{\mathbb{Z}}{(10)}$ tenemos

x	$3x$
0	0
1	3
2	6
3	9
4	2
5	5
6	8
7	1
8	4
9	7

$$\begin{array}{cccccccc} & P & A & C & I & F & I & C \\ & & B & A & L & T & I & C \\ + & & A & R & C & T & I & C \\ \hline & C & C & C & C & C & C & C \end{array}$$

La única posibilidad para C es $C = 5$, y para I es $I = 8$.

Después de esto, F debe ser un dígito impar, ...

$$
\begin{array}{ccccccc}
4 & 6 & 5 & 8 & 9 & 8 & 5 \\
 & 2 & 6 & 0 & 7 & 8 & 5 \\
 & 6 & 3 & 5 & 7 & 8 & 5 \\
\hline
5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5
\end{array}
$$

Problema 35. *Sea* $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$*; comprueba que* $x^2 = \sqrt{24} + \sqrt{25}$*; escribe de una manera similar* x^3 *y* x^4 *y trata de demostrar que, para todo exponente natural* n*, la potencia* x^n *se puede llegar a escribir como la suma de las raíces cuadradas de dos números naturales consecutivos, es decir, que* $x^n = \sqrt{M} + \sqrt{M+1}$ *con algún* $M \in \mathbb{N}$*.*

Problema 35. *Sea* $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$*; comprueba que* $x^2 = \sqrt{24} + \sqrt{25}$*; escribe de una manera similar* x^3 *y* x^4 *y trata de demostrar que, para todo exponente natural* n*, la potencia* x^n *se puede llegar a escribir como la suma de las raíces cuadradas de dos números naturales consecutivos, es decir, que* $x^n = \sqrt{M} + \sqrt{M+1}$ *con algún* $M \in \mathbb{N}$*.*

Sea, con más generalidad, $x = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$. Pensando en desarrollos de binomio de Newton, se tiene lo siguiente.
Si m es impar:

$$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^m = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$$
$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^m = -a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$$
$$(a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1})(-a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}) = b^2(n+1) - a^2 n = 1,$$

por tanto

$$a^2 n + 1 = b^2(n+1), \quad \text{y}$$
$$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^m = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} = \sqrt{a^2 n} + \sqrt{a^2 n + 1}.$$

Si m es par:

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^m = a + b\sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^m = a - b\sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

$$(a+b\sqrt{n}\sqrt{n+1})(a-b\sqrt{n}\sqrt{n+1}) = a^2 - b^2 n(n+1) = 1,$$

por tanto

$$a^2 = b^2 n(n+1) + 1, \quad \text{y}$$

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^m = a+b\sqrt{n}\sqrt{n+1} = \sqrt{b^2 n(n+1)}+\sqrt{b^2 n(n+1)+1}.$$

Problema 36. *Sobre una cinta de 2 m. de longitud hemos señalado trazos verdes cada 11 mm. y trazos rojos cada 17 mm., partiendo del mismo extremo de la cinta. ¿Cuántos trazos rojos están a 1 mm. de un trazo verde?*

Problema 36. *Sobre una cinta de 2 m. de longitud hemos señalado trazos verdes cada 11 mm. y trazos rojos cada 17 mm., partiendo del mismo extremo de la cinta. ¿Cuántos trazos rojos están a 1 mm. de un trazo verde?*

La respuesta es 21. Un trazo verde cualquiera estará a una distancia $11x$ (x entero positivo) del extremo de la cinta del que se parte para ir marcando, y un trazo rojo a una distancia $17y$ (y entero positivo) de dicho extremo. Queremos saber el número de soluciones (x, y) distintas, y aceptables dentro de las condiciones del problema, de la ecuación diofántica

$$|11x - 17y| = 1. \tag{1}$$

Caso 1: Ecuación $17a - 11b = 1$:
Solución particular $a = 2$, $b = 3$; solución general:
$$\begin{cases} a = 2 + 11t, \\ b = 3 + 17t. \end{cases}$$
Por un lado debe ser $t \geq 0$.

Por otro lado, debe ser $17a = 34 + 187t \leq 2000$, luego $t < 10{,}5$, de modo que los posibles valores de t son 0, 1, ..., 10: esto da 11 soluciones aceptables para la ecuación (1).

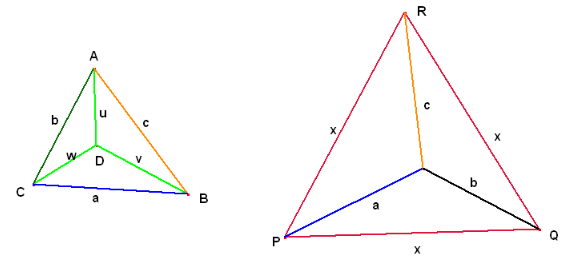
Caso 2: Ecuación $17a - 11b = -1$:

Solución particular $a = 9$, $b = 14$; solución general:

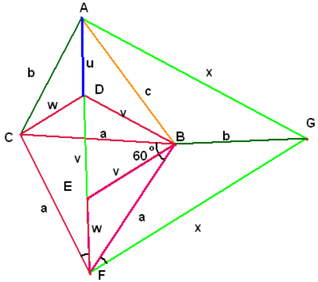
$$\begin{cases} a = 9 + 11t, \\ b = 14 + 17t. \end{cases}$$

Por un lado debe ser $t \geq 0$. Por otro lado, debe ser $11b = 154 + 187t \leq 2000$, luego $t < 9{,}8$, de modo que los posibles valores de t son 0, 1, ..., 9: esto da otras 10 soluciones aceptables, y diferentes de las anteriores, para la ecuación (1).

Problema 37. *Dados un triángulo ABC y un triángulo equilátero PQR como los de la figura, donde*
$\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 120°$. *Probar que $x = u + v + w$.*



Solución 1. Girando con centro en B y ángulo 60° el triángulo DCB se obtiene el triángulo BEF:

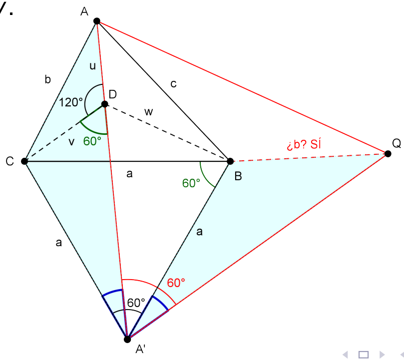


DBE y BCF son triángulos equiláteros, luego $DE = v$ y $CF = a$.
Los puntos A, D, E y F están alineados, pues $120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, así que $AF = u + v + w$.
Dibujamos el triángulo equilátero AFG de lado AF.
Ahora $AF = FG$, $CF = BF$ y $\angle CFA = \angle BFG = 60^\circ - \angle AFB$.
Así $\triangle CFA = \triangle BFG$. Por lo tanto, $BG = AC = b$, el triángulo equilátero requerido es el $\triangle AFG$ de lados $x = u + v + w$.

Solución 2.

1. Dibujar el $\triangle BCA'$ equilátero construido sobre el lado BC "hacia fuera" del $\triangle ABC$:

El cuadrilátero $DBA'C$ es inscriptible, porque dos de sus ángulos opuestos (60°, 120°) suman 180°, luego, por una parte, aplicando el resultado del problema 20, $DA' = v + w$. Y por otra parte, $\angle CDA' = \angle CBA' = 60^\circ$, luego $\angle ADA' = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, así que los puntos A, D y A' están alineados y se tiene que $AA' = u + v + w$.



2. Dibujar ahora el $\triangle AA'Q$ equilátero de lado AA'. Sólo queda ver que $BQ = b$ (así, el $\triangle PQR$ es igual al $\triangle AA'Q$ y $x = u + v + w$). Para esto veamos que los triángulos $A'CA$ y $A'BQ$ son iguales:

- $A'C = A'B = a$
- $A'A = A'Q = u + v + w$
- $\angle CAA' = \angle BA'Q = 60^\circ - \angle AA'B$

Pues ya está.