Curso 2010-11

Problema 7. *Sea n un número entero. Demuestra que el número $n^5 - 5n^3 + 4n$ es divisible por 120. Y que, si n es par, el número $n^3 - 4n$ es siempre divisible por 48.*

Problema 7. *Sea n un número entero. Demuestra que el número $n^5 - 5n^3 + 4n$ es divisible por 120. Y que, si n es par, el número $n^3 - 4n$ es siempre divisible por 48.*

Para la primera parte, descomponemos en factores:

$$\begin{aligned} P(n) &= n(n^4 - 5n^2 + 4) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2); \end{aligned}$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Como para todo entero n, $P(n)$ es el producto de cinco enteros consecutivos, y uno de cada cinco enteros consecutivos es múltiplo de 5, $P(n)$ es divisible por 5.
Análogamente, uno de cada tres enteros consecutivos es múltiplo de 3; luego $P(n)$ es también múltiplo de 3 para todo entero n.

De cada cuatro enteros consecutivos, uno es múltiplo de cuatro y hay otro distinto que es también par. Luego $P(n)$ es divisible por $4 \times 2 = 8$ para todo entero n.
Luego $P(n)$ es divisible por 120 para todo entero n.

De cada cuatro enteros consecutivos, uno es múltiplo de cuatro y hay otro distinto que es también par. Luego $P(n)$ es divisible por $4 \times 2 = 8$ para todo entero n.
Luego $P(n)$ es divisible por 120 para todo entero n.
Para la segunda parte, descomponemos también en factores:

$$Q(n) = n(n-2)(n+2).$$

Como n es par, $n-2, n, n+2$ son números pares consecutivos, con lo que (al menos) uno de ellos es divisible por 4. Por tanto, $Q(n)$ es divisible por 16. Además, como $n-2, n, n+2$ son (pares) consecutivos, uno de ellos es divisible por 3. Por tanto, $Q(n)$ es divisible por 48.

Problema 8. *¿Para qué valores de n es divisible por* 13 *el número* $3^{6n} + 5^{6n}$*?*

Problema 8. *¿Para qué valores de n es divisible por 13 el número $3^{6n} + 5^{6n}$?*

Para los impares:

$$3^{6n} + 5^{6n} \equiv 1^{2n} + (-1)^{3n} \equiv \begin{cases} 0, & n \text{ impar} \\ 2, & n \text{ par} \end{cases} \pmod{13}.$$

Problema 8. *¿Para qué valores de n es divisible por 13 el número $3^{6n} + 5^{6n}$?*

Para los impares:

$$3^{6n} + 5^{6n} \equiv 1^{2n} + (-1)^{3n} \equiv \begin{cases} 0, & n \text{ impar} \\ 2, & n \text{ par} \end{cases} \pmod{13}.$$

Problema 9. *(a) En una pizarra están escritos todos los números del 1 al 2010. Vamos, sucesivamente, borrando un par de números escritos a, b y escribiendo en su lugar el número* $a + b - 2$*, hasta que sólo quede un número.*
¿Qué número es?
(b) Ahora escribimos los números del 1 al 2011, y vamos, sucesivamente, borrando dos números a, b y escribiendo en su lugar $|a - b|$*, hasta que sólo quede un número.*
¿Será este número par o impar?

Problema 9. *(a) En una pizarra están escritos todos los números del 1 al 2010. Vamos, sucesivamente, borrando un par de números escritos a, b y escribiendo en su lugar el número $a + b - 2$, hasta que sólo quede un número. ¿Qué número es?*
(b) Ahora escribimos los números del 1 al 2011, y vamos, sucesivamente, borrando dos números a, b y escribiendo en su lugar $|a - b|$, hasta que sólo quede un número. ¿Será este número par o impar?

a) Al comienzo, hay 2010 números escritos y la suma de todos ellos es

$$\frac{1}{2} \cdot 2010 \cdot (1 + 2010) = 2021055.$$

En cada paso queda un número menos y la suma de los números escritos se reduce en 2 unidades. Cuando queda sólo un número se han dado 2009 pasos, y la suma de los números se ha reducido en $2 \cdot 2009 = 4018$ unidades.
El número que queda al final es $2021055 - 4018 = 2017037$.
(b) La suma de los números al comienzo es

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2011 \cdot (1 + 2011) = 2011 \cdot 1006,$$

un número par. En cada paso la suma pasa de ser, digamos, $S_0 + a + b$ a $S_0 + |a - b|$, luego disminuye en

$$a + b - |a - b| = 2 \cdot \text{mín}(a, b),$$

un número par. Entonces el número final será par.

Problema 10. *En una isla hay 13 camaleones blancos, 15 verdes y 17 rojos. Cuando se encuentran dos camaleones de distinto color, los dos se vuelven del tercer color. ¿Pueden ser los 45 camaleones de color blanco en algún momento?*

Problema 10. *En una isla hay 13 camaleones blancos, 15 verdes y 17 rojos. Cuando se encuentran dos camaleones de distinto color, los dos se vuelven del tercer color. ¿Pueden ser los 45 camaleones de color blanco en algún momento?*

1ª Solución

Supongamos que se encuentran primero un camaleón blanco y uno verde, y los dos pasan a ser rojos. Disminuyen en una unidad los números de blancos y verdes, y aumenta en dos unidades el número de rojos; la terna de restos módulo 3 pasa a ser $(0, 2, 1)$.

Supongamos que se encuentran primero un camaleón blanco y uno rojo, y los dos pasan a ser verdes. La terna de restos módulo 3 pasa a ser $(0, 2, 1)$.

Supongamos que se encuentran primero un camaleón verde y uno rojo, y los dos pasan a ser blancos. La terna de restos módulo 3 pasa a ser (también) $(0, 2, 1)$.

Tras cualquier segundo encuentro, la terna de restos pasa a ser $(2,1,0)$. Tras cualquier tercer encuentro la terna de restos vuelve a ser $(1,0,2)$, lo mismo que al principio.
Entonces, es imposible que en algún momento la terna de restos pase a ser $(0,0,0)$, como sucedería en el caso de ser blancos los 45 camaleones.

2ª Solución

Es una solución algebraica. Llamemos x al número de encuentros entre camaleones blancos y verdes, y al número de encuentros entre camaleones blancos y rojos y z al número de encuentros entre camaleones verdes y rojos. Planteamos entonces el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 13 - x - y + 2z = 45 \\ 15 - x + 2y - z = 0 \\ 17 + 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Si restamos la tercera ecuación menos la segunda, obtenemos que $2 + 3x - 3y = 0$, o lo que es lo mismo, que $2 = 3(y - x)$, pero x e y son números naturales, con lo cual es imposible que el producto $3(y - x)$ sea 2. Por tanto, no hay solución con números enteros para este sistema, de modo que en ningún caso podrán ser los 45 camaleones blancos simultáneamente.

Problema 11. *Un triángulo rectángulo de base $b = 30$ cm se divide en dos partes por una recta paralela a la base, a saber, en un trapecio de área F_1 y altura y_1, y un triángulo de área F_2 y altura y_2. La longitud del segmento de división es x. Conocidos además los datos $F_1 - F_2 = \Delta = 420$ cm ^{2}, $y_2 - y_1 = \delta = 20$ cm, se trata de hallar x, y_1 e y_2.*

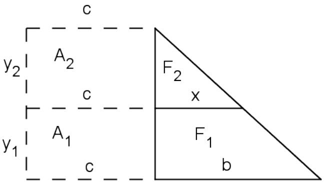
Problema 11. *Un triángulo rectángulo de base $b = 30$ cm se divide en dos partes por una recta paralela a la base, a saber, en un trapecio de área F_1 y altura y_1, y un triángulo de área F_2 y altura y_2. La longitud del segmento de división es x. Conocidos además los datos $F_1 - F_2 = \Delta = 420$ cm ^{2}, $y_2 - y_1 = \delta = 20$ cm, se trata de hallar x, y_1 e y_2.*

Solución 1. (Este problema, con estos datos y con su solución de este modo, procede de una tablilla cuneiforme babilonia del tiempo de Hammurabi, $\sim$1700 a.C.).
Añadamos "a la izquierda" del triángulo un rectángulo de altura $y_1 + y_2$ y anchura c, donde de momento c es una incógnita auxiliar. Se prolonga también la recta de división. En el trapecio rectángulo así formado, sean A_1 y A_2 las áreas de los trapecios inferior y superior. Escojamos la anchura c de manera que sea $A_1 = A_2$.

En tal caso,

$$0 = A_1 - A_2 = F_1 + cy_1 - (F_2 + cy_2) = \Delta - c\delta,$$

luego debe ser $c = \dfrac{\Delta}{\delta} = 21$ cm.



Ahora, de acuerdo con el problema 3 de la hoja 1, sabemos que

$$c + x = \sqrt{\frac{(b+c)^2 + c^2}{2}},$$

luego

$$x = \sqrt{\frac{(b+c)^2 + c^2}{2}} - c = \sqrt{\frac{51^2 + 21^2}{2}} - 21 = 18 \text{ cm}.$$

Ya sólo queda resolver el sistema

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 20 \\ \dfrac{y_2}{18} = \dfrac{y_1}{30-18} \end{cases}$$

resultando $y_1 = 40$ cm, $\quad y_2 = 60$ cm.

Solución 2.
Por los datos del problema:

$$\begin{cases} F_2 = \frac{x \cdot y_2}{2} \\ F_1 = \dfrac{(30+x)y_1}{2} \end{cases}$$

de donde

$$F_1 - F_2 = 15y_1 + x\frac{y_1 - y_2}{2} = 420.$$

Es decir, $3y_1 - 2x = 84$.
De la semejanza de triángulos,

$$\frac{x}{y_2} = \frac{30}{y_1 + y_2},$$

relación que podemos poner en términos de y_1, ya que

$$x = \frac{3y_1 - 84}{2} \quad \text{e} \quad y_2 = 20 + y_1.$$

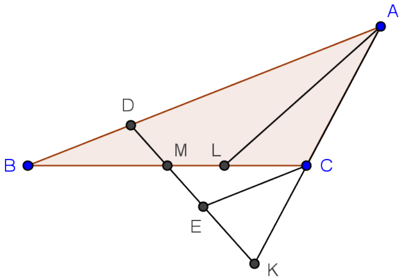
Así llegamos a la ecuación

$$\frac{3y_1 - 84}{2(20 + y_1)} = \frac{30}{2y_1 + 20}$$

que, simplificada, queda $y_1^2 - 28y_1 - 480 = 0$. La única solución positiva es $y_1 = 40$ cm, lo que nos lleva a $x = 18$ cm, $y_2 = 60$ cm.

Problema 12. *Sea M el punto medio del lado BC de un triángulo ABC $(AB > AC)$, y sea AL (donde L es un punto de BC) la bisectriz interior del ángulo A. La recta que pasa por M y es perpendicular a AL corta a AB en el punto D. Probar que $AD = \frac{1}{2}(AB + AC)$.*

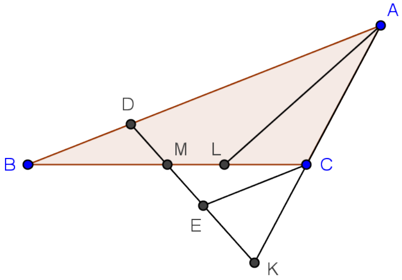
Problema 12. *Sea M el punto medio del lado BC de un triángulo ABC ($AB > AC$), y sea AL (donde L es un punto de BC) la bisectriz interior del ángulo A. La recta que pasa por M y es perpendicular a AL corta a AB en el punto D. Probar que $AD = \frac{1}{2}(AB + AC)$.*



La recta que pasa por M y es perpendicular a AL corta a la prolongación de AC en el punto K.

El $\triangle ADK$ es isósceles, luego $AD = AK$.
Trazar por C la recta CE (E en DK) paralela a AB. Se tiene $CE = BD$, el $\triangle CEK$ es isósceles ($CE = CK$), luego

$$2AD = AD + AK = AB - BD + AC + CK = AB + AC.$$



Problema 13. *Resolver la ecuación*
$(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 1 = x.$

Problema 13. *Resolver la ecuación* $(x^2-3x+1)^2-3(x^2-3x+1)+1=x.$

La ecuación tiene la forma $f(f(x))=x$, donde $f(x)=x^2-3x+1$. Si x es solución de la ecuación $f(x)=x$, entonces también es solución de $f(f(x))=x$, porque en ese caso $f(f(x))=f(x)=x$. Luego dos soluciones de la ecuación son las soluciones de

$$x^2-4x+1=0: \quad x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}.$$

Dividiendo, conseguimos la factorización

$$(x^2-3x+1)^2-3(x^2-3x+1)+1-x=$$
$$x^4-6x^3+8x^2+2x-1=(x^2-4x+1)(x^2-2x-1),$$

luego $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$.

Problema 14. *¿Se puede transformar la función* $f(x) = x^2 + 4x + 3$ *en la función* $g(x) = x^2 + 10x + 9$ *por una cadena sucesiva de transformaciones de la forma* $T(f(x)) = x^2 f(1 + 1/x)$ *ó* $S(f(x)) = (x-1)^2 f(1/(x-1))$*?*

Problema 14. *¿Se puede transformar la función $f(x) = x^2 + 4x + 3$ en la función $g(x) = x^2 + 10x + 9$ por una cadena sucesiva de transformaciones de la forma $T(f(x)) = x^2 f(1 + 1/x)$ ó $S(f(x)) = (x-1)^2 f(1/(x-1))$?*

En general,

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a,$$

y el discriminante de este polinomio imagen es

$$(2a + b)^2 - 4a(a + b + c) = b^2 - 4ac,$$

el mismo que el del polinomio original.

$$S(ax^2 + bx + c) = cx^2 + (b - 2c)x + a - b + c,$$

y el discriminante de este polinomio imagen es

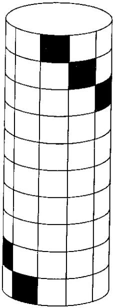
$$(b - 2c)^2 - 4c(a - b + c) = b^2 - 4ac,$$

el mismo que el del polinomio original. Cualquier cadena de transformaciones T y S aplicada a un polinomio de segundo grado conservará el valor inicial del discriminante. Pero el discriminante de $x^2 + 4x + 3$ es 4, y el de $x^2 + 10x + 9$ es 64, luego $f(x)$ no se puede transformar así en $g(x)$.

Problema 15. *Se colocan 41 torres en un tablero de ajedrez* 10×10. *Probar que siempre se podrán seleccionar cinco de ellas, de modo que ninguna de las cinco esté atacando a ninguna otra de esas cinco.*

Problema 15. *Se colocan 41 torres en un tablero de ajedrez 10×10. Probar que siempre se podrán seleccionar cinco de ellas, de modo que ninguna de las cinco esté atacando a ninguna otra de esas cinco.*

Formamos un cilindro pegando dos lados opuestos del tablero, y pintamos de 10 colores distintos las 10 diagonales "principales" de ese tablero enrrollado.



Tenemos $41 = 4 \cdot 10 + 1$ palomas (torres) en 10 nidos (diagonales monocromáticas). Por el principio del palomar, tiene que haber al menos un nido (diagonal) con 5 palomas (torres). Pero 2 torres en la misma diagonal monocromática no se atacan, de acuerdo con las reglas del ajedrez.