Curso 2010-11

Problema 111 *Hallar los números primos de la forma* $n^4 + 4$, *con* $n \in \mathbb{N}$.

Problema 111 *Hallar los números primos de la forma* $n^4 + 4$*, con* $n \in \mathbb{N}$*.*

$$n^4 + 4 = (n^2 + an + b)(n^2 + cn + d)$$
$$n^4 + 4 = n^4 + (a + c)n^3 + (b + d + ac)n^2 + (bc + da)n + bd$$

Debe ser

$$\left.\begin{array}{rcl} a + c & = & 0 \\ b + d + ac & = & 0 \\ bc + da & = & 0 \\ bd & = & 4 \end{array}\right\}$$

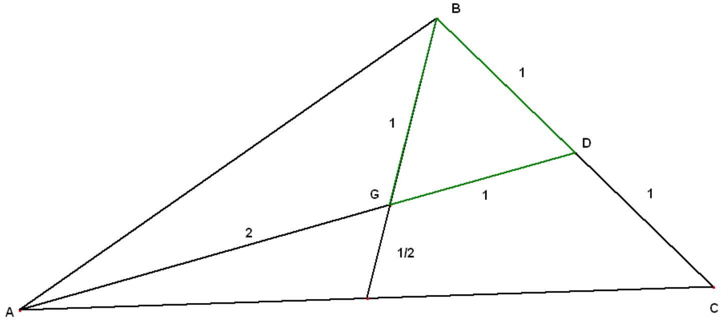
$a = 2,\ c = -2,\ b = d = 2$

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

Para que el número sea primo debe ser $n^2 - 2n + 2 = 1$, esto es $n = 1$ y el único primo de la forma $n^4 + 4$ es 5.

Problema 112 *Sea G el baricentro del triángulo ABC y sea D el punto medio del lado BC. Suponiendo que el triángulo BDG es equilátero de lado 1, determina las longitudes de los lados AB, BC y CA de ABC.*

Problema 112 *Sea G el baricentro del triángulo ABC y sea D el punto medio del lado BC. Suponiendo que el triángulo BDG es equilátero de lado 1, determina las longitudes de los lados AB, BC y CA de ABC.*



Como el baricentro divide la mediana en dos partes, de las cuales la que contiene al vértice tiene longitud doble de la que toca al lado, se tiene $AG = 2$.
El ángulo $AGB = 120^\circ$, luego por el teorema del coseno tenemos

$$AB^2 = 1 + 4 - 4\cos 120^\circ = 5 + 2 = 7$$

$$AB = \sqrt{7}$$

Por ser D el punto medio de BC es $DC = 1$.

$$BC = 2$$

El ángulo $ADC = 120^\circ$, luego por el teorema del coseno tenemos

$$AC^2 = 9 + 1 - 6\cos 120^\circ = 9 + 1 + 3 = 13$$

$$AC = \sqrt{13}.$$

Problema 113 *Hallar los valores naturales de* x *que convierten la expresión* $x^2 + 5x + 160$ *en un cuadrado perfecto.*

Problema 113 *Hallar los valores naturales de x que convierten la expresión $x^2 + 5x + 160$ en un cuadrado perfecto.*

$$x^2 + 5x + 160 = (x + t)^2$$
$$x^2 + 5x + 160 = x^2 + 2tx + t^2$$
$$(2t - 5)x = 160 - t^2$$
$$x = \frac{160 - t^2}{2t - 5}$$

Para que x sea positivo debe ser $3 \leq t \leq 12$.

t	x
3	151
4	48
5	27
6	$\frac{124}{7}$
7	$\frac{111}{9}$

t	x
8	$\frac{96}{11}$
9	$\frac{79}{13}$
10	4
11	$\frac{39}{17}$
12	$\frac{16}{19}$

Problema 114 *Hallar todos los enteros a, b y c para los cuales*

$$(x-a)(x-10)+1=(x+b)(x+c) \quad \textit{para todo } x.$$

Problema 114 *Hallar todos los enteros a, b y c para los cuales*

$$(x-a)(x-10)+1=(x+b)(x+c) \quad \textit{para todo } x.$$

De la identificación polinómica se deduce

$$-a-10=b+c, \quad bc=10a+1;$$

eliminando a entre estas ecuaciones resulta
$bc+10b+10c+100=1$, es decir

$$(b+10)(c+10)=1,$$

donde b y c son números enteros. Sólo caben las siguientes posibilidades:

b	c	a
-9	-9	8
-11	-11	12

Problema 115 *Los puntos P y Q están en los lados AB y AC respectivamente del triángulo ABC y son distintos del vértice A. Las longitudes AP y AQ se denotan por x e y, respectivamente. Demostrar que si la recta PQ pasa por el baricentro del triángulo ABC, se cumple*

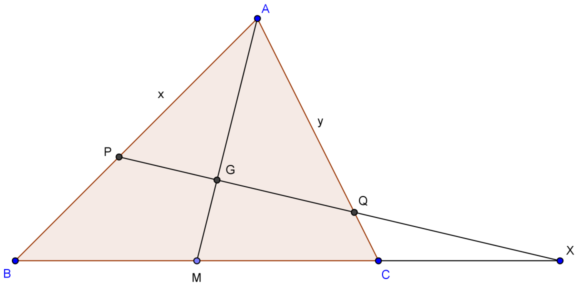
$$3xy = bx + cy,$$

donde $b = AC$ y $c = AB$.

Problema 115 *Los puntos P y Q están en los lados AB y AC respectivamente del triángulo ABC y son distintos del vértice A. Las longitudes AP y AQ se denotan por x e y, respectivamente. Demostrar que si la recta PQ pasa por el baricentro del triángulo ABC, se cumple*

$$3xy = bx + cy,$$

donde $b = AC$ y $c = AB$.



Sea X el punto de intersección de PQ con la prolongación del lado BC. Aplicando el *teorema de Menelao* al $\triangle ABM$ cortado por la transversal XP, se tiene

$$\frac{XM}{XM+\frac{a}{2}}\cdot\frac{c-x}{x}\cdot\frac{2}{1}=1.$$

Aplicando el mismo teorema al $\triangle AMC$ cortado por la misma transversal XP, se tiene

$$\frac{XM}{XM-\frac{a}{2}}\cdot\frac{b-y}{y}\cdot\frac{2}{1}=1.$$

Se tiene entonces:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{c-x}{x}=\dfrac{XM+\frac{a}{2}}{2\cdot XM}\\[2ex]\dfrac{b-y}{y}=\dfrac{XM-\frac{a}{2}}{2\cdot XM}\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{c}{x}=\dfrac{3\cdot XM+\frac{a}{2}}{2\cdot XM}\\[2ex]\dfrac{b}{y}=\dfrac{3\cdot XM-\frac{a}{2}}{2\cdot XM}\end{array}\right.$$

y sumando estas ecuaciones resulta $\dfrac{c}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{6\cdot XM}{2\cdot XM}=3.$

Problema 116 *Las rectas OA, OB y OC son perpendiculares dos a dos. Expresar el área del triángulo ABC en términos de las áreas de los triángulos OAB, OBC y OCA.*

Problema 116 *Las rectas OA, OB y OC son perpendiculares dos a dos. Expresar el área del triángulo ABC en términos de las áreas de los triángulos OAB, OBC y OCA.*

Recordamos la Fórmula de Herón que relaciona el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados x, y y z:

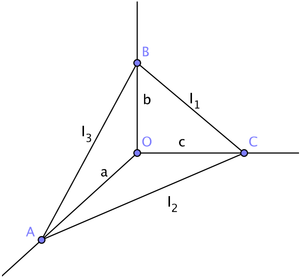
$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)},$$

donde s es el semiperímetro:

$$s = \frac{x+y+z}{2}.$$

La fórmula puede reescribirse de la siguiente forma:

$$A = \frac{\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}}{4}.$$



Tomamos ahora un sistema de referencia de origen O y ejes OA, OB y OC. Entonces, denotando por $[XYZ]$ el área de un triángulo XYZ,

$$[OAB] = \frac{ab}{2}, \quad [OBC] = \frac{bc}{2}, \quad [OCA] = \frac{ca}{2}.$$

Llamemos l_1, l_2 y l_3 a los lados del triángulo ABC. Se tiene

$$l_1^2 = c^2 + b^2, \quad l_2^2 = a^2 + c^2, \quad l_3^2 = a^2 + b^2.$$

Aplicando la fórmula de Herón para desarrollar $[ABC]^2$

$$
\begin{aligned}
[ABC]^2 &= \frac{(l_1 + l_2 + l_3)(l_1 + l_2 - l_3)(l_2 + l_3 - l_1)(l_3 + l_1 - l_2)}{16} \\
&= \frac{((l_1 + l_2) + l_3)(((l_1 + l_2) - l_3)(l_3 + (l_2 - l_1))(l_3 - (l_2 - l_1)}{16} \\
&= \frac{(l_1 + l_2)^2 - l_3^2)(l_3^2 - (l_2 - l_1)^2)}{16} \\
&= \frac{(l_1 l_2 + c^2)(l_1 l_2 - c^2)}{4} = \frac{l_1^2 l_2^2 - c^4}{4}.
\end{aligned}
$$

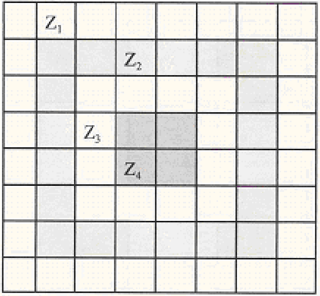
Desarrollando la expresión anterior, se tiene que

$$[ABC]^2 = \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{4} = \frac{1}{2}([OAB]^2 + [OAC]^2 + [OBC]^2).$$

Problema 117 *Si colocamos al azar dos reinas sobre un tablero de ajedrez en casillas distintas, ¿cuál es la probabilidad de que no se amenacen entre sí?*

Problema 117 *Si colocamos al azar dos reinas sobre un tablero de ajedrez en casillas distintas, ¿cuál es la probabilidad de que no se amenacen entre sí?*

El tablero de ajedrez según las casillas que puede amenazar una reina (las de su fila, su columna y sus diagonales), queda distribuido en 4 zonas que llamaremos Z_1 , Z_2 , Z_3 y Z_4:

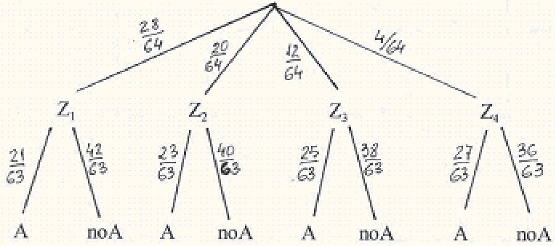


Z_1 consta de 28 casillas, y una reina situada en Z_1 amenaza 21 casillas
Z_2 consta de 20 casillas, y una reina situada en Z_2 amenaza 23 casillas
Z_3 consta de 12 casillas, y una reina situada en Z_3 amenaza 25 casillas
Z_4 consta de 4 casillas, y una reina situada en Z_1 amenaza 27 casillas

Si colocamos la primera reina, puede caer sobre cualquiera de estos zonas con probabilidades:

$P(Z_1)=28/64$; $P(Z_2)=20/64$; $P(Z_3)=12/64$; $P(Z_4)=4/64$

Ahora colocamos al azar la segunda reina en una de las 63 casillas restantes. El diagrama de árbol ahora ya es sencillo:



Por tanto, la probabilidad de que la segunda reina caiga en una casilla no amenazada es:

$$P(noA)=\frac{28}{64}\cdot\frac{42}{63}+\frac{20}{64}\cdot\frac{40}{63}+\frac{12}{64}\cdot\frac{38}{63}+\frac{4}{64}\cdot\frac{36}{63}=\frac{23}{36}\approx 0'639$$